

## カルマンフィルタを適用した実存建物の振動特性の推定\*

東北大学大学院工学研究科都市・建築学専攻 高橋 容之  
 東北大学大学院工学研究科都市・建築学専攻 三辻 和弥  
 東北大学大学院工学研究科附属災害制御研究センター 源栄 正人

### 1. はじめに

近年、BCP・BCMや建築物の長寿命化という観点から、都市や建築物の運用・維持管理の重要度が増しており、これらを実行していく一つ的手段として、建築物に関しては構造ヘルスマニタリングが注目されている。本論では、地震時にオンライン構造ヘルスマニタリングを行うことを前提として、逐次計算が可能なカルマンフィルタを適用して実存建物の振動特性を推定し、基本的な検討を行う。

### 2. カルマンフィルタ

カルマンフィルタは、図1のような状態空間モデルで表される可制御、可観測な線形離散時間システムの状態推定に用いられるフィルタとしてよく知られている<sup>1),2)</sup>。また、非線形離散時間システムに対して適用できるよう線形化を行ったものが拡張カルマンフィルタである(以下EKF)。EKFでは、線形化のため、非線形関数の偏微分行列の計算が必要となる。さらに、確率変数の非線形変換後の統計量を近似計算するアンセンテッド変換に基づいたカルマンフィルタが近年注目を集めている(以下UKF)。UKFでは、シグマポイントと呼ばれるサンプル値生成のため、正定値対称行列のコレスキー分解が必要となる。表1に各フィルタの特徴を示す。

EKFは非線形離散時間システムの状態推定に適用できることから、線形離散時間システムのパラメータを状態量とみなして、定常パラメータの推定に利用できる。また、忘却係数を導入することにより、非定常パラメータの推定を行うことも可能である<sup>2),3),4)</sup>。

表1 カルマンフィルタの特徴

フィルタ (略称)	特徴	近似の精度
カルマンフィルタ (KF)	線形システムで最適推定	
拡張カルマンフィルタ (EKF)	非線形システムを線形近似	Taylor 展開の1次項
アンセンテッドカルマンフィルタ (UKF)	非線形変換後の統計量を近似	Taylor 展開の2次項

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t) \end{array} \right. \quad t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$$

図1 状態空間モデル

(左：線形離散時間システム，右：非線形離散時間システム)

\*Estimation of vibration characteristics of the existent building by using Kalman filter, Tohoku Univ. by Yoshiyuki Takahashi, Kazuya Mitsuji and Masato Motosaka

### 3. カルマンフィルタによる1質点系モデルの状態とパラメータ推定

EKF を適用して1質点系モデルのパラメータ推定を行っている例は数多くあるが、UKF を適用している例はまだ少ない。UKF による非定常パラメータの推定のため、EKF と同様に忘却係数を導入し、数値シミュレーションによるパラメータ推定の検討を行う。

カルマンフィルタは離散時間に対するアルゴリズムであるため、連続時間で表される1質点系の運動方程式を状態空間モデルで表現し、状態方程式を4次精度 Runge-Kutta 公式を用いて離散化する。図2に離散化した1質点系の運動方程式を示す。

#### 1 質点系の運動方程式

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{x}_0(t)$$

#### 1 質点系の運動方程式の線形離散時間システム表示

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{A}_D \mathbf{x}(t_n) + \mathbf{B}_D \bar{\mathbf{u}}(t_n)$$

$$\mathbf{y}(t_n) = \mathbf{C}_D \mathbf{x}(t_n)$$

$$\mathbf{x}(t_n) = \begin{Bmatrix} x(t_n) \\ \dot{x}(t_n) \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}(t_n) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t_n) \\ \mathbf{u}(t_{n+1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0(t_n) \\ \ddot{x}_0(t_{n+1}) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \mathbf{A}^2 + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \mathbf{A}^3 + \frac{1}{24} (\Delta t)^4 \mathbf{A}^4$$

$$\mathbf{B}_D = \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B} \mathbf{c}_1^T + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{c}_2^T + \frac{1}{24} (\Delta t)^3 \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{c}_3^T + \frac{1}{24} (\Delta t)^4 \mathbf{A}^3 \mathbf{B} \mathbf{c}_4^T$$

$$\mathbf{C}_D = [-\omega^2 \quad -2h\omega]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2h\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

図2 1質点系の運動方程式の離散化

これより、 $t_n \rightarrow t$ ,  $\mathbf{A}_D \rightarrow \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_D \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_D \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u}$  として、Appendix1、Appendix2 に示すアルゴリズムを適用すれば、状態とパラメータを推定することができる。

UKF では、シグマポイントの計算に共分散行列のコレスキー分解を必要とする。コレスキー分解は正定値対称行列でなければ計算できないが、誤差やシステムで表現できない成分の影響により共分散行列が正定でなくなる場合がある。この場合には、共分散行列を単位行列の正定数倍に置き換えることで解決できる。本論では、正定数を0.1としている。

パラメータ推定の数値シミュレーションとして、2008年岩手・宮城内陸地震の際に東北大学工学部人間・環境系研究棟に設置されている強震計 SMAC-MD により観測された1Fの加速度記録のNS成分を入力とし、高次モードの影響を見るために定常な3質点系モデルの加速度応答値にノイズを加えたもの、非定常な1質点系モデルの加速度応答値にノイズを加えたものを観測値とした。加速度応答値は4次精度 Runge-Kutta 法を用いて求め、ノイズ  $\mathbf{v}(t)$  は次式

$$w(t+1) = -4 \times \{w(t) - 0.5\}^2 + 1, \quad w(0) = 0.12345$$

$$\mathbf{v}(t) = 0.1 \times \{w(t) - 0.5\}$$

で計算したものとした。ノイズのパワーが平坦で位相がランダムであることを確認している。建物の上下階に地震計が設置されている場合を想定して、3質点系モデルの最上層の観測値を

表 2 質点系モデルのパラメータ設定

	パラメータ	1次	2次	3次
定常3質点系モデル	減衰定数	0.0499	0.114	0.107
	固有振動数	1.82 Hz	6.40 Hz	10.96 Hz
非定常1質点系モデル	減衰定数	0.05	0.10まで一定増加	
	固有振動数	5.0 Hz	20秒でステップ的に4.0Hzに変化	

解析に使用した。パラメータの初期値は減衰定数を0.10、固有振動数を5.0Hzとし、推定誤差共分散行列の初期値はEKFで100、UKFで1、忘却係数はEKF、UKFともに0.975とした。

表2にモデルパラメータを示す。図3に3質点系モデルの最上層の観測値とパラメータの推定結果を、図4に1質点系モデルのパラメータの推定結果を示す。2つのモデルとも、微動レベルではノイズの影響で推定できていないが、振幅が大きくなると推定の精度が上がっている。3質点系モデルでは、3次モードまでの応答が含まれており、その影響で推定値に変動が生じていると考えられる。1質点系モデルでは、推定値は真値とほぼ同じであるが、ノイズの振幅レベルが加速度応答値と比較して相対的に大きくなると、推定誤差が大きくなる。図5に図4の19~24秒の区間を拡大して示す。固有振動数がステップ的に変化する時刻周辺で、減衰定数の推定値にも誤差が見られる。固有振動数の推定誤差の影響が減衰定数に及んでいることが分かる。

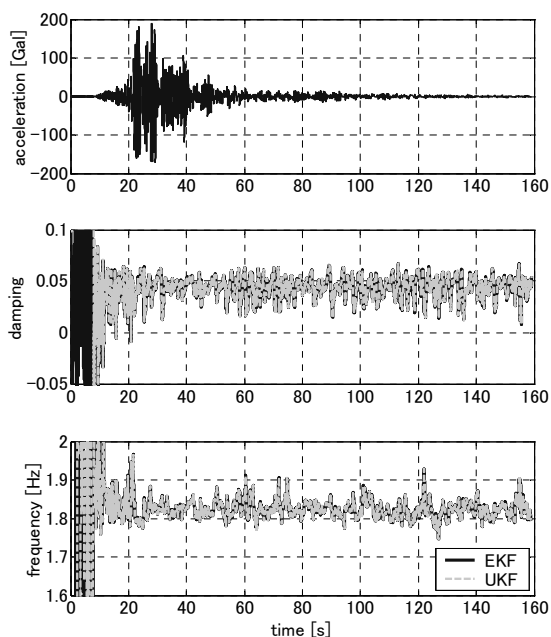


図3 3質点系モデルの観測値とパラメータ推定値

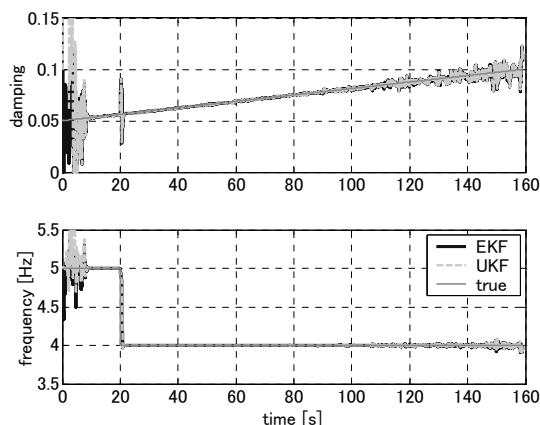


図4 1質点系モデルのパラメータ推定値

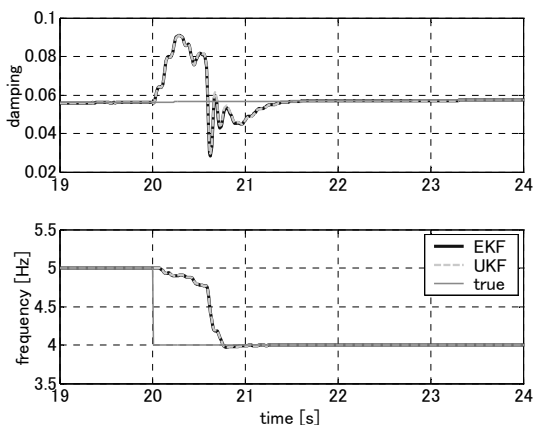


図5 1質点系モデルのパラメータ推定誤差

#### 4. 実存建物の振動特性の推定

実観測記録への適用として、対象建築物を SRC 造 9 階建ての東北大学工学部人間・環境系研究棟とした。解析には 2008 年岩手・宮城内陸地震の際に SMAC-MD により観測された 1F と 9F の地震記録の NS 成分を用いた。パラメータの初期値は減衰定数を 0.10、固有振動数を 5.0Hz とし、推定誤差共分散行列の初期値は EKF で 100、UKF で 1、忘却係数は EKF、UKF とともに 0.975 とした。図 6 に加速度記録を、図 7 に振動特性の推定結果を示す。EKF、UKF とともに同様な推定結果を示し、固有振動数の振幅依存性も確認できる。減衰定数は、変動が大きく負の値にまで達しているが、観測値の振幅が大きくなると減衰定数も大きくなる傾向にある。

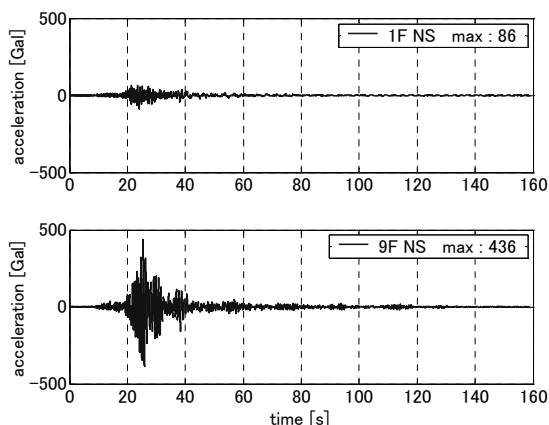


図 6 加速度記録

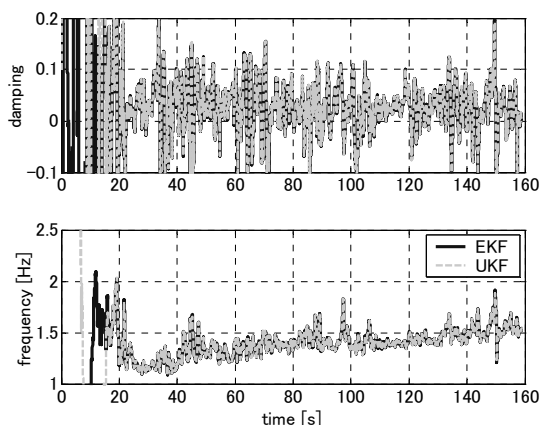


図 7 振動特性の推定結果

#### 5. まとめ

UKF に忘却係数を導入することにより、EKF と同様に非定常パラメータの推定が行えることが確かめられた。実存建物の振動特性の推定結果は、質点系モデルと比較して変動は大きいですが、概ね良好であり、固有振動数や減衰定数の振幅依存性も確認できた。今後は、多自由度化や非線形システムについて、さらなる検討を重ねていく必要がある。

#### 謝辞

今回使用した地震記録は、東北大学と(独)建築研究所の共同研究により得られたものです。

#### 参考文献

- 1) 谷萩隆嗣: デジタル信号処理ライブラリー5 カルマンフィルタと適応信号処理, コロナ社, 2005.12
- 2) Simon Haykin: Kalman Filtering and Neural Networks, WILEY, 2001.10
- 3) 佐藤忠信, 竹井賢二: 適応型カルマンフィルタの構築とその応用, 土木学会論文集, 第 584 巻, 第 I-42 号, pp.163-173, 1998.1
- 4) 桐田史生, 金澤健司, 森清宣貴, 北村春幸: 建築物の地震損傷検知のための適応回帰型システム同定, 日本建築学会構造系論文集, 第 619 号, pp.65-72, 2007.9
- 5) 柴田明徳: 最新耐震構造解析 第 2 版, 森北出版, 2003.5

### Appendix1. 拡張カルマンフィルタによる状態とパラメータの推定アルゴリズム

未知パラメータを含む線形離散時間システム

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{w}(t)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

の状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$ 、パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}(t)$  を推定する。ただし、 $\mathbf{v}(t)$ 、 $\mathbf{w}(t)$  は平均値がそれぞれ  $\mathbf{0}$ 、 $\mathbf{0}$ 、共分散行列がそれぞれ  $\mathbf{V}(t)$ 、 $\mathbf{W}(t)$  である白色雑音とする。

初期化 ( $t = t_0$ )

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (\text{ただし、}\boldsymbol{\theta}_0 \neq \mathbf{0}\text{、}\mathbf{I}\text{ は単位行列})$$

$$\mathbf{P}_e(t_0) = \alpha \mathbf{I}, \alpha > 0$$

逐次計算 ( $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ )

$$\hat{\mathbf{x}}^-(t) = \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))\mathbf{u}(t-1)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)$$

$$\mathbf{P}_e^-(t) = \mathbf{A}_e(t-1)\mathbf{P}_e(t-1)\mathbf{A}_e^T(t-1) + \mathbf{D}_e(t-1)\mathbf{W}(t-1)\mathbf{D}_e^T(t-1)$$

$$\mathbf{A}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) & \mathbf{A}_\theta(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\theta(t) = \left. \frac{\partial \{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{u}(t)\}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T(t)} \right|_{\boldsymbol{\theta}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)}$$

$$\mathbf{D}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}_e^-(t)\mathbf{C}_e^T(t)[\mathbf{C}_e(t)\mathbf{P}_e^-(t)\mathbf{C}_e^T(t) + \mathbf{V}(t)]^{-1}$$

$$\mathbf{C}_e(t) = [\mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t)) \quad \mathbf{C}_\theta(t)], \mathbf{C}_\theta(t) = \left. \frac{\partial \{\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\hat{\mathbf{x}}^-(t)\}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T(t)} \right|_{\boldsymbol{\theta}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t)}$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t))\hat{\mathbf{x}}^-(t)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^-(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}(t)\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{P}_e(t) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}_e(t)]\mathbf{P}_e^-(t)$$

パラメータが非定常である場合には、 $\mathbf{P}_e^-(t)$  を計算した後に、パラメータに関する部分行列を忘却係数  $\lambda$  で割ればよい。また、忘却係数は  $0.950 \leq \lambda \leq 0.995$  程度が一般的である。

$$\mathbf{P}_e^-(t) = \begin{bmatrix} [\mathbf{P}_e^-(t)]_{xx} & [\mathbf{P}_e^-(t)]_{x\theta} \\ [\mathbf{P}_e^-(t)]_{x\theta}^T & \lambda^{-1}[\mathbf{P}_e^-(t)]_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

### Appendix2. アンセンテッドカルマンフィルタによる状態とパラメータの推定アルゴリズム

状態ベクトル  $\mathbf{x}(t)$ 、パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}(t)$ 、プロセス雑音ベクトル  $\mathbf{w}(t)$  を一体とした  $N$  次元ベクトル  $\boldsymbol{\sigma}(t) = [\hat{\mathbf{x}}^T(t) \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \quad \mathbf{w}(t)^T]^T$ 、共分散行列  $\mathbf{P}_\sigma(t)$  を考えたとき、シグマポイント  $\boldsymbol{\Sigma}_i(t)$  と表し、その各成分をそれぞれ  $\mathbf{X}_i(t)$ 、 $\boldsymbol{\Theta}_i(t)$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_i(t)$  と表す。

$[\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t)}]_i$  は  $[\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t)}][\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t)}]^T = \mathbf{P}_\sigma(t)$  を満たす下三角行列  $\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t)}$  の第  $i$  列である。

初期化 ( $t = t_0$ )

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_0) = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (\text{ただし、} \boldsymbol{\theta}_0 \neq \mathbf{0}、\mathbf{I} \text{ は単位行列})$$

$$\mathbf{P}_z(t_0) = \alpha \mathbf{I}, \alpha > 0$$

逐次計算 ( $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ )

$$\mathbf{P}_\sigma(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_z(t-1) & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{W}(t-1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_0(t-1) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t-1) = [\hat{\mathbf{z}}^T(t-1) \quad \mathbf{0}^T]^T = [\hat{\mathbf{x}}^T(t-1) \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1) \quad \mathbf{0}^T]^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i(t-1) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t-1) + \gamma[\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t-1)}]_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i(t-1) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t-1) - \gamma[\sqrt{\mathbf{P}_\sigma(t-1)}]_{i-N} \quad (i = N+1, N+2, \dots, 2N)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i(t) = [\mathbf{Z}_i^T(t) \quad \boldsymbol{\Omega}_i^T(t)]^T = [\mathbf{X}_i^T(t) \quad \boldsymbol{\Theta}_i^T(t) \quad \boldsymbol{\Omega}_i^T(t)]^T \quad (i = 0, 1, \dots, 2N)$$

$$\mathbf{Z}_i^-(t) = \begin{cases} \mathbf{X}_i^-(t) \\ \boldsymbol{\Theta}_i^-(t) \end{cases}, \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_i^-(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}_i(t-1))\mathbf{X}_i(t-1) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\Theta}_i(t-1))\mathbf{u}(t-1) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\Theta}_i(t-1))\boldsymbol{\Omega}_i(t-1) \\ \boldsymbol{\Theta}_i^-(t) &= \boldsymbol{\Theta}_i(t-1) \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, 2N)$$

$$\hat{\mathbf{z}}^-(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^-(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t) \end{cases}, \quad \hat{\mathbf{x}}^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \mathbf{X}_i^-(t), \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \boldsymbol{\Theta}_i^-(t)$$

$$\mathbf{P}_z^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \{ \mathbf{Z}_i^-(t) - \hat{\mathbf{z}}^-(t) \} \{ \mathbf{Z}_i^-(t) - \hat{\mathbf{z}}^-(t) \}^T$$

$$\mathbf{Y}_i^-(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}_i^-(t))\mathbf{X}_i^-(t) \quad (i = 0, 1, \dots, 2N)$$

$$\hat{\mathbf{y}}^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \mathbf{Y}_i^-(t)$$

$$\mathbf{P}_y^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \{ \mathbf{Y}_i^-(t) - \hat{\mathbf{y}}^-(t) \} \{ \mathbf{Y}_i^-(t) - \hat{\mathbf{y}}^-(t) \}^T + \mathbf{V}(t)$$

$$\mathbf{P}_{zy}^-(t) = \sum_{i=0}^{2N} w_i \{ \mathbf{Z}_i^-(t) - \hat{\mathbf{z}}^-(t) \} \{ \mathbf{Y}_i^-(t) - \hat{\mathbf{y}}^-(t) \}^T$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}_{zy}^-(t) [\mathbf{P}_y^-(t)]^{-1}$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}^-(t)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{z}}^-(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{P}_z(t) = \mathbf{P}_z^-(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{P}_y^-(t)\mathbf{K}(t)$$

ただし、

$$\gamma = \sqrt{N + \kappa}, \quad w_0 = \frac{\kappa}{N + \kappa}, \quad w_i = \frac{1}{2(N + \kappa)} \quad (i = 1, 2, \dots, 2N)$$

であり、 $\kappa$  はスケーリングパラメータ (正規分布のとき、 $\kappa = 3 - N$ ) である。

パラメータが非正常である場合には、共分散行列  $\mathbf{P}_z^-(t)$  に対して Appendix1 と同様の計算を行えばよい。