

有限体積法による平面流れ場の計算の高精度化*

東北大学工学部 東田 現

東北大学大学院工学研究科 有働恵子・真野 明

1. はじめに

河川での土砂の堆積・侵食は水の流れによって引き起こされる現象であり、河川管理上、これらの現象を制御することが重要な課題となっている。例えば図1のように曲がりのある流路では、流れの剥離により右岸側では死水域が生じ、流速が減衰し堆積が促進される。また、左岸側では剥離した流れが衝突し侵食が促進される。以上のことから、流れの剥離は土砂の堆積・侵食を評価する上で重要な現象である。

土砂の堆積・侵食を制御する対策として、水制の設置や護岸を行なうといった対策があるが、適切な効果を得るためには、対象とする流路の流れ場を精度良く予測し、それに基づき水制の設置や護岸を行なう必要がある。このような平面流れ場を予測するモデルとして、真野ら(2008)は、非構造格子を用いた空間・時間ともに一次精度の有限体積法による流れ場の計算モデルを開発し、FASSYAL ら⁽¹⁾は非構造格子を用いた空間・時間ともに二次精度の有限体積法による計算モデルを開発している。この他にも数多くモデルが開発され研究がなされているが、流れの剥離について議論したものが少ないのが現状である。

本研究では既存の有限体積法による流れ場の計算手法を取り入れ、流れの剥離による流れ場の変化を高精度で予測し、土砂の堆積・侵食の制御に役立てることのできる計算モデルを新たに開発することを目的とする。離散化には空間に MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)法、時間に中央差分を導入し、空間・時間ともに二次精度の計算モデルを開発した。

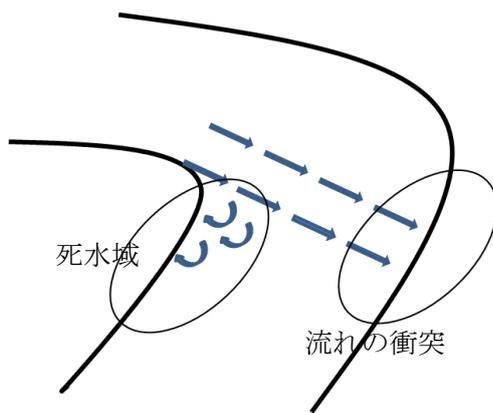


図1 曲がりのある流路

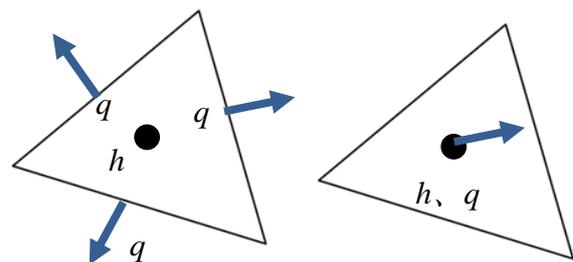


図2 非構造格子の計算点の配置
(左:スタガード格子、右:コロケート格子)

* Development of high accuracy calculation of 2D flow by finite volume method by Arata Higashida, Keiko Udo and Akira Mano

2. 計算モデル

2.1 はじめに

本研究では図2のような非構造格子を用いた有限体積法を計算手法とし、計算モデルの開発を行なった。有限体積法は構造格子を用いる差分法や有限要素法に比べ、非構造格子を用いることができ、複雑な形状に適応できるため汎用度が高いという利点がある。特に壁面に垂直でない水制を設置するような場合は、非構造格子は構造格子に比べ境界にうまくフィットさせることができる。

非構造格子の計算点の配置は、図2のコロケート格子を用い、要素中心に水位 η 、単位幅流量 q を与えた。真野ら(2008)の計算モデルでは図1のスタッガード格子を用いて、一次精度の計算を行なっているが、二次精度の計算を行なう場合、要素中心の流量を二次精度で補間することが難しい。それに対し、コロケート格子では辺上の流量を二次精度で補間する方法が数多く確立されており、補間がしやすいという利点がある。そのため本研究ではコロケート格子を用いた。

2.2 支配方程式

流れの支配方程式は鉛直方向に積分した連続式と運動方程式であり、まとめて表示すると以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{\partial}{\partial x} E + \frac{\partial}{\partial y} G = W \quad (2.2.1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \eta \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} q_x \\ uq_x + gD\eta - \bar{v}_t \partial_x q_x \\ vq_x - \bar{v}_t \partial_x q_y \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} q_y \\ uq_y - \bar{v}_t \partial_y q_x \\ vq_y + gD\eta - \bar{v}_t \partial_y q_y \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{bx}/\rho \\ \tau_{by}/\rho \end{pmatrix}$$

ここで、 η は水位、 q_x 、 q_y はそれぞれ xy 方向の単位幅流量、 u 、 v はそれぞれ xy 方向の流速、 g は重力加速度、 D は水深、 \bar{v}_t は鉛直方向に平均した渦動粘性係数、 τ_{bx} 、 τ_{by} はそれぞれ xy 方向の底面せん断力である。式(2.2.1)を領域 S 、境界 Γ のコントロールボリューム i (以下 $CV(i)$)で積分し、ガウスの発散定理を適用すると、

$$\iint_S \left(\frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{\partial}{\partial x} E + \frac{\partial}{\partial y} G \right) ds = \iint_S W ds$$

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial t} Q ds + \iint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} d\zeta = \iint_S W ds \quad (2.2.1)$$

ここで、 \mathbf{n} は辺 Γ の法線ベクトルであり、 \mathbf{F} は E と G を x 成分、 y 成分とするベクトルである。式(2.2.1)を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_i = -\frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^3 F_{ij} |G_{ij}| + W_i \quad (2.2.2)$$

ただし、 $Q_i = \frac{1}{S_i} \iint_S Q ds$ 、 $W_i = \frac{1}{S_i} \iint_S W ds$ 、 $F_{ij} = \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}$ である。

式(2.2.2)を空間、時間に対して離散化を行ない、プログラムに組み込み計算を進めた。

2.3 空間二次精度化

式(2.2.2)における F_{ij} は辺 Γ_{ij} 上を横切るフラックスであり、水位、流量は現在、要素の中心に与えているため、 F_{ij} は補間して計算する必要がある。この計算に二次精度の風上差分である MUSCL(Monotone

Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)法を用いた。

図3のように二つの CV(i), CV(j)を考え, その境界の辺 Γ_{ij} の左側と右側の物理量を Q_L, Q_R とし, 以下の式で計算する。

$$\begin{aligned} Q_L &= Q_i + \frac{1}{2} \varphi(r) \nabla Q_i \cdot \vec{r}_{ij} \\ Q_R &= Q_j - \frac{1}{2} \varphi(r) \nabla Q_j \cdot \vec{r}_{ij} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

ただし, $r = (Q_R - Q_L) / (\nabla Q_i \cdot \vec{r}_{ij})$

\vec{r}_{ij} : 点 i と点 j を結ぶベクトル

$\varphi(r)$: minmod制限関数

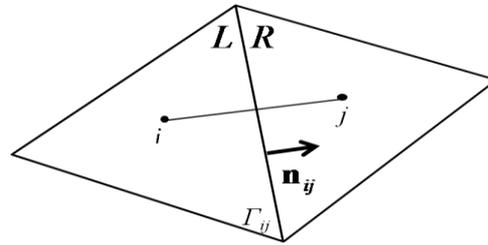


図3 MUSCL法における節点と辺

式(2.3.1)を用い, 辺 Γ_{ij} において以下のように風上差分を行ない, F_{ij} を計算する。

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \{ [F(Q_R) + F(Q_L)] \cdot \mathbf{n}_{ij} - |A| (Q_R - Q_L) \} \quad (2.3.2)$$

ここで A は F_{ij} のjacobian行列であり, 以下のように計算する。

$$A = \frac{\partial (F \cdot \mathbf{n}_{ij})}{\partial Q} \quad (2.3.3)$$

2.4 時間二次精度化

時間に対する離散化は以下の手順で中央差分を行なった。

i) 式(2.2.2)を $t=n$ から $t=n+1/2$ まで時間 $\Delta t/2$ だけ進ませて, 前進差分を行ない $Q_i^{n+1/2}$ を得る。

$$Q_i^{n+1/2} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2S_i} \sum_{j=1}^3 F_{ij} |\Gamma_{ij}| + \frac{\Delta t}{2} W_i \quad (2.4.1)$$

ii) 式(2.3.1), 式(2.3.2)を用い, $F_{ij}^{n+1/2}$ を得る。

$$F_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \{ [F(Q_R^{n+1/2}) + F(Q_L^{n+1/2})] \cdot \mathbf{n}_{ij} - |A| (Q_R^{n+1/2} - Q_L^{n+1/2}) \} \quad (2.4.2)$$

iii) 時刻 $t=n+1$ における物理量 Q_i^{n+1} を計算する。

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \sum_{j=1}^3 F_{ij}^{n+1/2} |\Gamma_{ij}| + \Delta t W_i \quad (2.4.3)$$

3. 数値計算

3.1 計算精度の検証

計算精度の検証として以下の段波の計算を行なった。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h + u \frac{\partial}{\partial x} h &= 0 \\ h(x, 0) &= \begin{cases} 1.0 & (x \leq 0.3) \\ 0.0 & (x > 0.3) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

その結果, 一次精度の計算値と比べて, 二次精度の計算値は真値に近い計算値を得ることができた。流れの剥離が生じる領域では, 急激に流れが変化するので, 図4のように段波の変化を少ない誤差で計算できる

二次精度の計算手法は,有効であると考えられる.

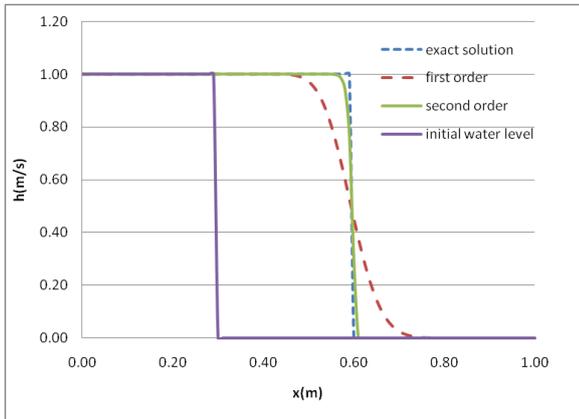


図4 $t=0.3$ における水位 $h(x,0.3)(m/s)$

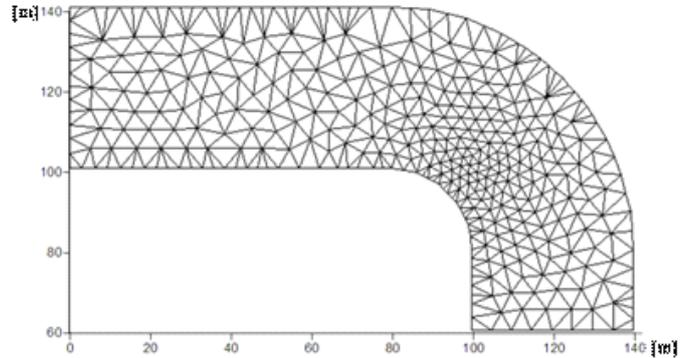


図5 計算対象流域のメッシュ図

3.2 計算条件

計算対象として図5のようにメッシュを張った蛇行河川を対象とし,要素数は665とした.メッシュ形成にはFree Soft“VORO”を用い,蛇行部ではメッシュ数を多く与えた.境界条件として,上流では等流水深,下流では堰を設け限界水深,壁面境界ではスリップ条件を与えた.また,時間ステップは $\Delta t=0.02$ とし $t=180000$ まで計算を行なうことで, $t=3600s$ における流れ場の予測を行なった.

3.3 計算結果・考察

流量は $Q=50(m^3/s)$,堰の高さは1mとして計算を行なった.水位,流速,流速ベクトルの初期分布を図6,図7に示す.

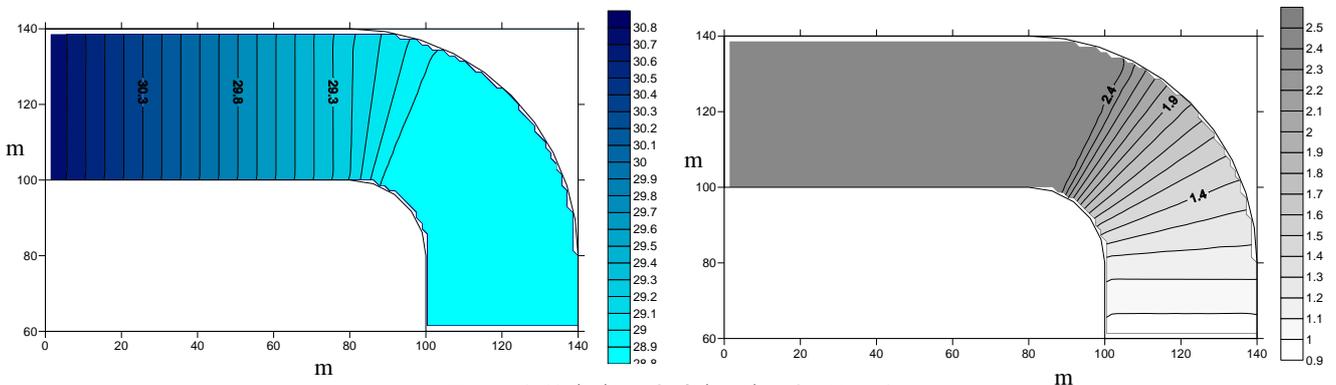


図6 水位(m)、流速(m/s)の初期分布

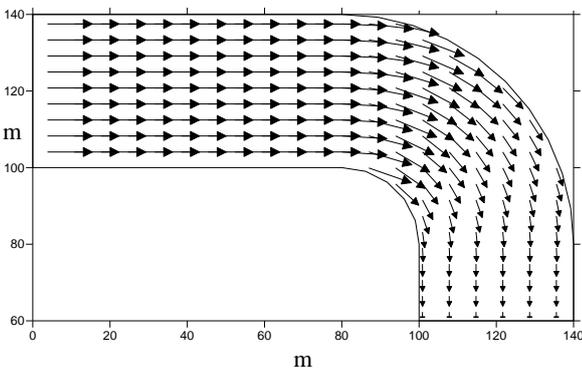


図7 流速ベクトルの初期分布

水位・流速の初期分布は堰の影響を受け、水位は途中から一定に、流速は緩やかになっていることが分かる。次に一次精度と二次精度の計算値を比較する。以下の図8から図10まで、左の図が一次精度の計算値、右の図が二次精度の計算値である。一次精度の計算には真野ら(2008)が開発したモデルを用いた。

図8より、一次精度・二次精度の計算値ともに流れが蛇行部で剥離し、死水域が右岸側に生じていることを再現できた。しかし、一次精度の計算値は蛇行部より上流の壁面沿いにおいて、スリップ条件を仮定しているにも関わらず流速値のばらつきが大きい。これに対して、二次精度の計算値は蛇行部より上流の壁面沿いにおいて流速分布にばらつきがなく、死水域では等高線の間隔が狭く、流れが剥離したことにより、流速が急激に減少したことを再現できた。また、図9より一次精度の計算では、蛇行部において流速ベクトルが壁面に沿って下流に向いているが、二次精度の計算では流速ベクトルが壁面から離れ、流れが剥離したことを再現できた。また、死水域では後流が生じ、流れが逆流していることを再現できた。

流れの剥離は、流れが物体の表面を慣性により離れることで起きる。よって、流量が増加すれば Re 数も大きくなるので、慣性により剥離が増加する。そこで、剥離が増加するかの確認をするために、流量を $Q = 150(\text{m}^3/\text{s})$ まで増加させ、二次精度の計算値の比較を行なった。その結果、図11より、 $Q = 50(\text{m}^3/\text{s})$ では左岸の蛇行部において壁面に沿って下流に向かう流速ベクトルがまだ存在するが、 $Q = 150(\text{m}^3/\text{s})$ のときには、それがなくなり、すべてのベクトルが壁面から剥離しており、流量が大きくなったことで、剥離が増加したことが分かる。

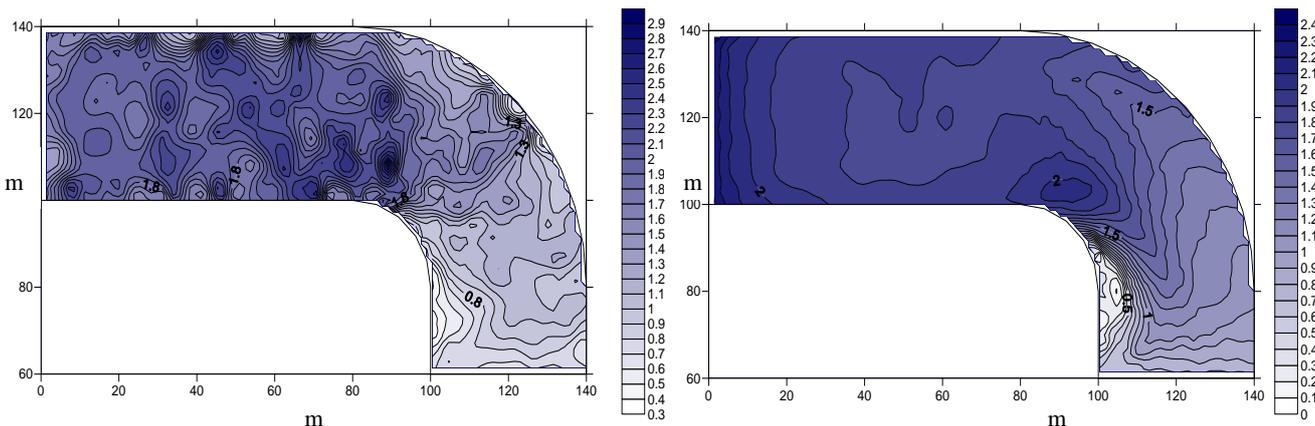


図8 $Q = 50(\text{m}^3/\text{s})$ における流速分布(m/s)の比較

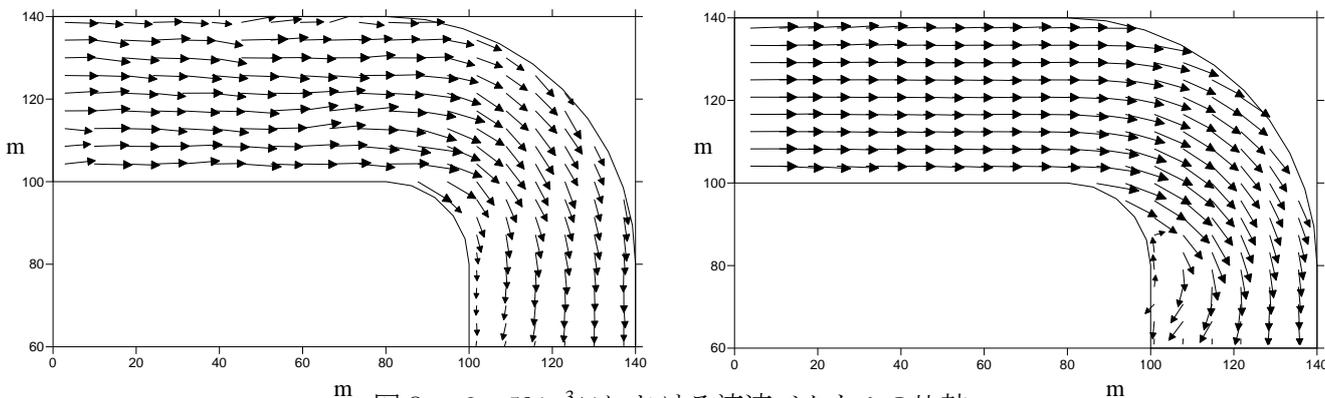


図9 $Q = 50(\text{m}^3/\text{s})$ における流速ベクトルの比較

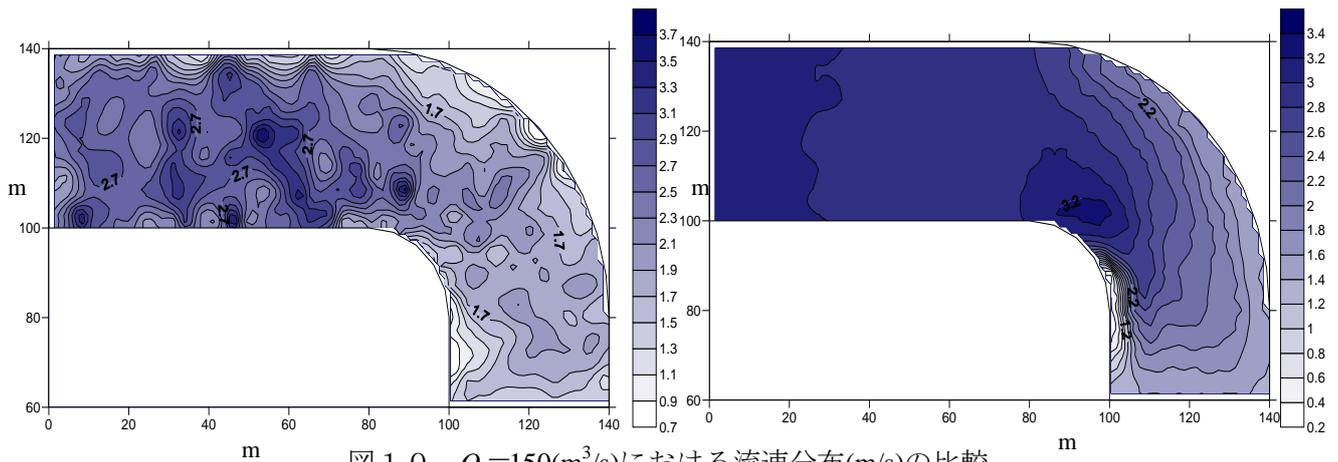


図 10 $Q=150(\text{m}^3/\text{s})$ における流速分布(m/s)の比較

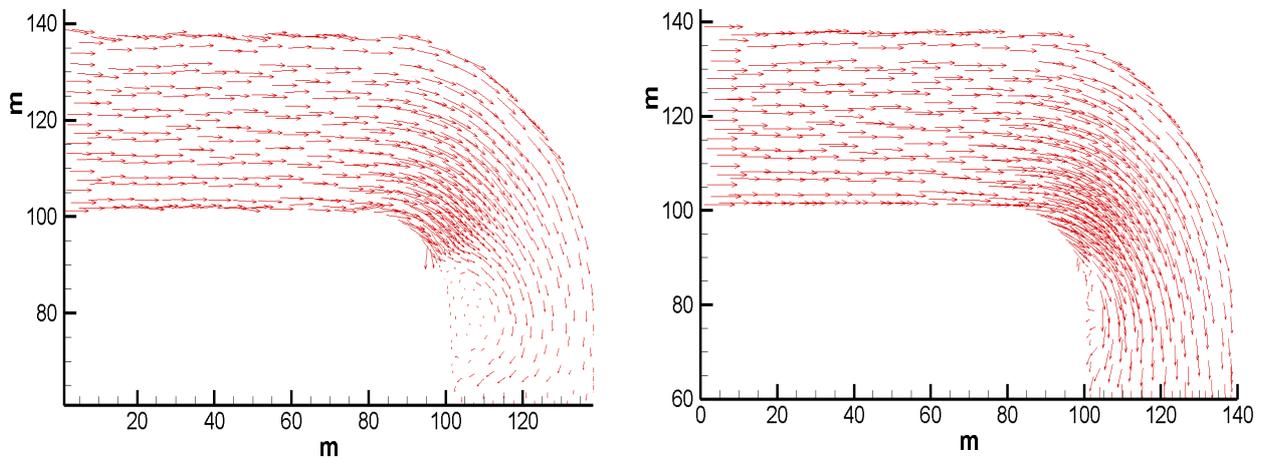


図 11 流速ベクトルの比較($Q=50(\text{m}^3/\text{s})$, $Q=150(\text{m}^3/\text{s})$)

4. まとめ

二次精度の計算手法である MUSCL 法,中央差分を用いて計算を行なうことによって,剥離による流れ場の変化を再現できるようになった.今後はさらに実験値と比較することで精度の検証を行ない,土砂の堆積・侵食の制御に役立てることのできる流れ場の計算モデルの開発を進めていく.

参考文献

- 1) FASSYAL BENKHADOUN,SLAH SAHMIM, and MOHAMMED SEAID,SOLUTION OF THE SEDIMENT TRANSPORT EQUATIONS USING A FINITE VOLUME METHOD BASED ON SIGN MATRIX, SIAM Journal on Scientific Computing Volume 31 ,2009
- 2) Ji-Wen-Wang and Ru-Xun Liu, A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2D shallow water problems, Mathematics and Computers in Simulation 53, p171-184, 2000
- 3) H K Versteeg and W Malalasekera, An Introduction to COMPUTATIONAL FRUID DYNAMICS The Finite Volume method, p267-279, 2007
- 4) 山下和之,近似的リーマン解法—流体計算—,2001
- 5) 小竹翔太,広瀬川における細粒土砂堆積制御に関する研究,2009