

k-ε モデルによる植生のある急勾配流れの乱れ特性予測

東北大学工学部 平田吉成
 東北大学災害科学国際研究所 真野明
 東北大学災害科学国際研究所 有働恵子
 東北大学災害科学国際研究所 呉修一

1. 背景

植生のある開水路の流れ予測は治水, 利水, 親水等の目的から数多くの研究がされてきた. 題目である植生のある急勾配流れの予測が可能となればそれに対応した状況, 例えば堤防越流時の侵食予測が可能になる. 特に近年においては局地的豪雨や大雨の頻発により計画高水位超過洪水の危険性が増していることから, この研究への需要は高まると考えられる.

これらの研究の流れ予測は数値解析で行われている. 乱流の数値解析においては計算時間が短く, モデルも簡易である k-ε モデルが広く用いられているが, 精度の高い予測は困難である. そのような中で様々な手法が提案され k-ε モデルの改良が行われている.

2. 目的

本研究では k-ε モデルを用いて植生のある急勾配流れの乱れ強度を予測する事を目的とする. しかしながら基本的な k-ε モデルだけでは精度の高い予測は難しいため, 他の論文で提案されている k-ε モデルの改良手法を佐藤の用いた式に適応させ, 予測精度を高めていくことを基本的な手段とする.

3. 既往研究と基本式

k-ε モデルを用いた, 植生のある緩勾配流れの予測は清水らによって研究された. 清水は植生を考慮するため下記の k-ε モデルの基本式(1),(2),(4),(5)式の右辺にそれぞれ(6),(7),(8),(9)式を加えたモデルを使用した.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2(v_t + \nu) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_t + \nu) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v_t + \nu) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2(v_t + \nu) \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$v_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + U \frac{\partial K}{\partial x} + V \frac{\partial K}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) \\ & + v_t \left[2 \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - \varepsilon \quad (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 v_t \frac{\varepsilon}{K} \left[2 \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (5)$$

ここに、 U, V は流下方向、垂直方向の時間平均流速(cm/s)、 x, y は流下方向、底面からの鉛直方向距離(cm)、 K は乱れエネルギー(cm^2/s^2)、 ε は乱れエネルギーの散逸率(cm^2/s^3)、 ν は動粘性係数(cm/s)、 v_t は渦動粘性係数(cm/s)を表し、係数 $C_\mu, C_1, C_2, \sigma_K, \sigma_\varepsilon$ はそれぞれ 0.09, 1.44, 1.92, 1.0, 1.3 とする。

$$-\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} C_{dy} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (7)$$

$$C_{fk} \left(\left(-\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \right) U + \left(-\frac{1}{2} C_{dy} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \right) V \right) \quad (8)$$

$$C_{f\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \left(\left(-\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \right) U + \left(-\frac{1}{2} C_{dy} \lambda U \sqrt{U^2 + V^2} \right) V \right) \quad (9)$$

ここに、 λ は植生密度(cm^2/cm^3)、係数 $C_{dx}, C_{dy}, C_{fk}, C_{f\varepsilon}$ はそれぞれ 1.3, 0, 0.15, 0.16 を使用した。(6),(7)式は植生による抗力、(8)式は植生の抗力によって生じる乱流運動エネルギー、(9)式は(8)式の乱流運動エネルギーの散逸を表している。

Katul⁴⁾らは植生の抗力により伴流が生じる際にできる、小さな渦が急速拡散することを考慮するモデルを作成した。すなわち清水の使用したモデルに加え、式(4),(5)の右辺に式(10),(11)を新たに加えたモデルを使用した。

$$-\beta_d \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda |U| + \frac{1}{2} C_{dy} \lambda |V| \right) K \quad (10)$$

$$-\beta_d C_s \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda |U| + \frac{1}{2} C_{dy} \lambda |V| \right) \varepsilon \quad (11)$$

Katul は係数 C_s を 1.5、 β_d を 4.0 として計算した。Katul は過去の実験データ、及び従来のモデルと比較し、流速、乱れエネルギー、レイノルズ応力の予測精度が向上した事を確認した。

佐藤^{2),3)}は堤防越流を想定した、植生のある開水路での流れと侵食を測定する実験をし、その結果を $k-\varepsilon$ モデルで予測する研究を行った。彼の実験は堤防を越流した流れが裏法面を流れる現象をモデル化したものである。実験開水路は水路長 4.2m、水路幅 0.2m、勾配 1/10 に設定し、植生のモデルは竹ひごを用いて路床全面に 2cm 間隔で高さ 3cm の円柱状のものを千鳥状に配置、流量は 500, 800, 1100 cm^3/s 、固定床に用いる砂の粒径は 0.1, 0.2, 0.3mm のそれぞれ 3 パターンで行われた。計算モデルは清水の用いた $k-\varepsilon$ モデルを、等流条件を用いて 1 次元にしたモデルを使用し、植生による抵抗で受ける力と、それによって発生する乱流エネルギーを考慮した。佐藤が使用したモデルを下に示す。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_t + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2} \quad (12)$$

$$v_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (13)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_i}{\sigma_K} + v \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) + v_i \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + C_{fk} \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U^2 \sqrt{U^2} \right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} + v \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 v_i \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \\ & + C_{f\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U^2 \sqrt{U^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

底面境界条件については岡部⁵⁾らのモデルを参考にしている。つまり、水路床に最も近い格子点の流れが水路床上での摩擦速度 u_{*B} に規定される平衡壁面乱流になるものと仮定し、次のように設定した。

$$(v_T + v) \frac{dU}{dy} = \alpha u_{*B}^2 \quad \text{at } y = \frac{y_B}{2} \quad (16)$$

$$K = \beta u_{*B}^2, \quad \varepsilon = \frac{u_{*B}^2}{\kappa y_B} \quad \text{at } y = y_B$$

ここで、 κ はカルマン定数、 α 及び β は係数である。 α 及び β の値は水路床が粗面の場合、 $\alpha=1$ 、 $\beta=4$ とするのが適当だとされている。水面境界条件については禰津・中川らのモデルを参考にし、次のように設定した。

$$U_{iend} - U_{iend-1} = \frac{u_{*0} \Delta y}{\kappa h_n}, \quad K_{iend} = \frac{2}{3} K_{iend-1}, \quad \varepsilon_{iend} = \frac{2}{3} \varepsilon_{iend-1} \quad (17)$$

ここで、 $iend$ は水面上に位置する計算格子点の番号、 Δy は格子点間隔である。 U の条件式は、 u_{*0} に規定される対数型流速分布から導かれている。

以上のモデルを時間に関しては前進差分、空間については中央差分で離散化し、計算を行った。また、実験から得た等流水深 h_n を既知量として与え、未知変量 U 、 K 及び ε の変動量がひとつ前の時間ステップに対して0.1%以内に収まる条件で収束解を求めた。なお、計算対象領域は実験開水路長と同等とし、 $y = y_B \sim h_n$ の範囲で、計算格子点をこの間に等間隔(y_B)で配置した。ここで y_B は、粒径 d を用いて $y_B = 2d$ とした。

また、乱れ強度は、計算された乱流エネルギー(K)を以下に示すRodiの代数応力関係⁶⁾を用いて評価した。

$$\overline{u'^2} = K \left\{ \frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2}{3} \frac{P_K}{\varepsilon} \right)}{c_\gamma + \frac{P_K}{\varepsilon} - 1} \right\} \quad (18)$$

ここに、 γ と c_γ はそれぞれ0.6、1.5である。

この計算モデルで計算された値と実験で計測された値を比較した図を次に示す。

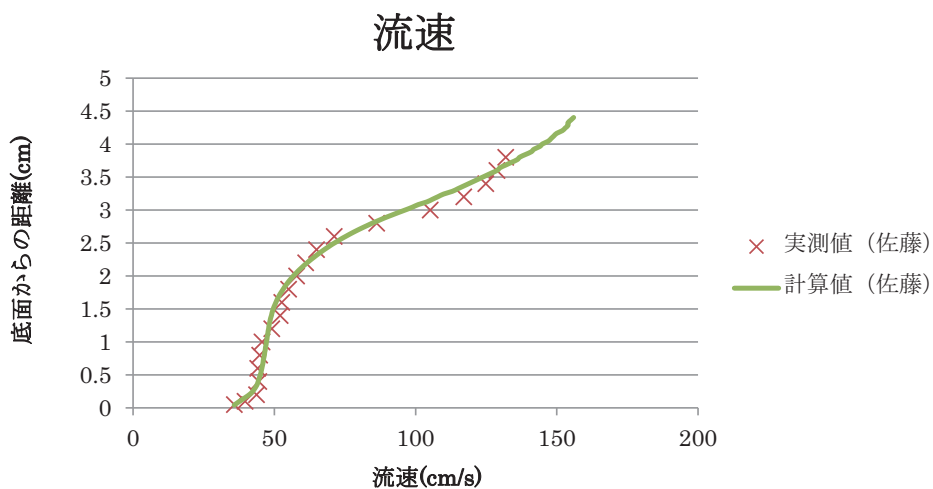


図 1.流量 8L/s での流速の実測値と計算値

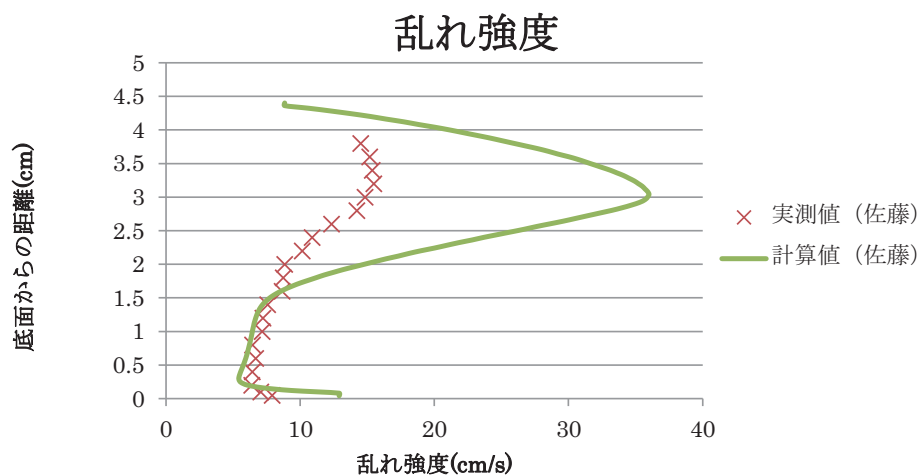


図 2.流量 8L/s での乱れ強度の実測値と計算値

計算による流速分布は実験値とほぼ一致し、精度の高い予測ができていると思われるが、一方、乱れ強度分布に関しては底面からの高さが 1.5cm 以下では精度の高い予測ができているが、1.5cm 以上では過大評価となっている。

5.提案モデル

この研究では佐藤の提案したモデルに Katul の用いた手法を適応したモデルを使用する。これによって佐藤のモデルでは考慮されていない、植生の抗力により伴流が生じる際にできる、急速に散逸する小さな渦が持っている乱流エネルギーを考慮に入れた計算ができるようになり、予測精度が向上すると考えられる。提案モデルを次に示す。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_t + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2} \quad (19)$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} = & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) + v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + C_{fk} \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U^2 \sqrt{U^2} \right) \\ & - \frac{1}{2} C_{dx} \beta_d \lambda U K \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 v_t \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} + C_{f\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U^2 \sqrt{U^2} \right) \\ & - C_5 \frac{1}{2} C_{dx} \lambda \beta_d U \varepsilon \quad (22) \end{aligned}$$

Katul が用いた係数 C_5 、 β_d は佐藤のモデルに適応させると次のように定義される。

$$C_5 = \frac{C_{f\varepsilon}}{C_{fk}} \quad (23)$$

$$\beta_d = C_\mu \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{\frac{2}{3}} C_{fk} + \frac{3}{\sigma_k} \quad (24)$$

各係数、底面境界条件、水面境界条件、数値計算方法は佐藤と同様のものを用いる。

6. 結果

提案モデルの値、佐藤の計算モデルの値、実験で計測された値を比較した図を次に示す。

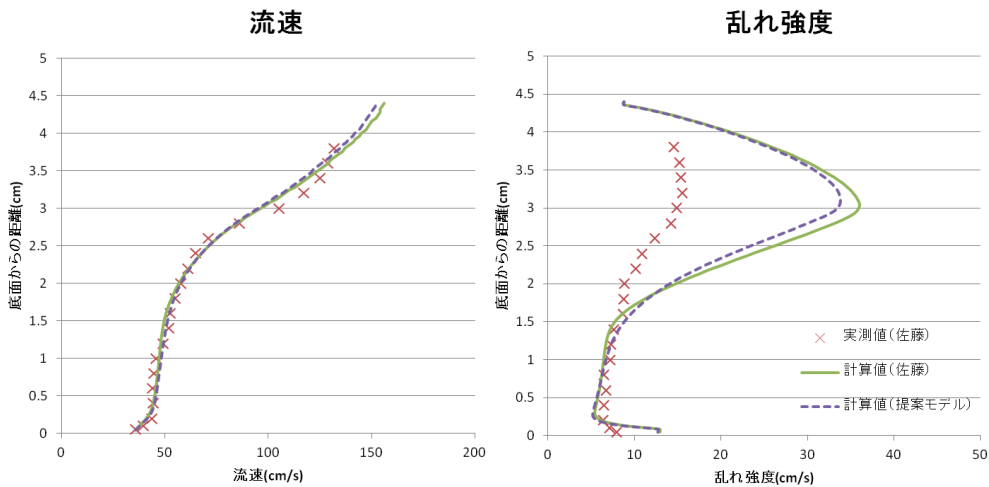


図 3. 粒径 0.2mm, 流量 8L/s での流速及び乱れ強度の実測値と提案モデルの計算値

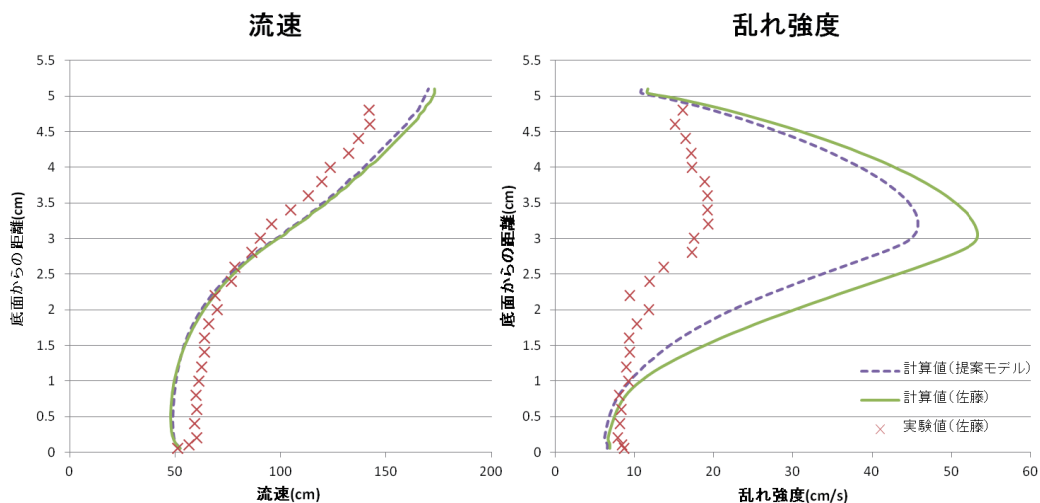


図 4. 粒径 0.3mm, 流量 11L/s での流速及び乱れ強度の実測値と提案モデルの計算値

図 3 は粒径 0.2mm, 流量 8L/s での結果, 図 4 は粒径 0.3mm, 流量 11L/s での結果を示している。流速分布は佐藤の結果とほとんど変わらなかった。乱れ強度分布は改善したが、改善された値は僅かであった。

7. まとめ

佐藤のモデルでは過大評価になっていた乱れ強度の計算を Katul の手法を用いることで、僅かながら改善することができた。しかしながら、乱れ強度の過大評価は未だに大きく、改善の余地がある。

8. 参考文献

- 1) 清水義彦: 直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究 水工学論文集第 44 巻, 1992
- 2) 佐藤元泰: 越流による堤防裏法面侵食に及ぼす植生の影響に関する基礎的研究 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻修士論文, 2012
- 3) 佐藤元泰: 堤防裏法面植生域での越流水の流速構造と侵食抑制効果 水工学論文集第 55 巻, 2011
- 4) Gabriel G. Katul One-and two equation models for canopy turbulence Boundary-Layer Meteorol. 113, 2004
- 5) 岡部健二: 植生を伴う河床上の掃流砂量に関する研究 水工論文集平成 11 年度版 p.243
- 6) Rodi W: A new algebraic relation for calculating the Reynolds stress ZAMM Vol56 pp.219~221, 1976