

秋田駒ヶ岳火山の重力変化に関する熱膨張モデル*

秋田大学（名誉教授） 狐崎 長琅

1. はじめに

(a) 地温, 地磁気, 重力等の定点反復観測により, 筆者は協力者達と共に 1970 年噴火後の秋田駒ヶ岳火山の推移を追跡してきた(狐崎・村岡, 2010)。噴火終了後女岳の火口自体は急速に冷却したが, 火口周辺域が高温化した。その極大期（噴火後高温期）の 1977-78 年頃以後, 地温は低下に転じ, 1995-98 年頃にはほぼ平常地温まで冷却した。しばらくその状況が維持されたが, 2006 年頃には変化の兆しが見られ, 同山頂域北東部の局所的残存高温部から再高温化が進展した。現在それは女岳の山頂域から山腹にかけてのほぼ東半域へと拡大しつつある（現高温期）。全磁力もこれと整合的に変化しているが, ここでは 1977 年以降観測されている重力変化を取り上げる。地温の下降と共に重力は顕著に増加し, 地温上昇と共に重力は減少した（図 8）。

(b) 噴火後と現在のいずれの高温場でも, 1m 深地温は沸点(95°C程度)未満で, 火山性ガスを伴わず, 新たにマグマが浅部に貫入した気配はない。現高温化は深部から新しく上昇した熱水によるだろうが, 噴火後高温化は噴火の際火道やその近傍に貫入・残存したマグマが, 冷却しつつ熱水を介して周辺域を加熱したことによるものとみられる(狐崎, 2012)。浅部層は浸透的で水蒸気を蓄積しがたく, 热水温度は概ね沸点以下に保たれていると思われる。このような状況では地盤変動や重力変化に寄与する機構として地層の熱膨張が考えられる。本研究では, 単純化した物理的モデルにより, 噴火後高温期を主対象として熱膨張の効果について検討する。

2. 热膨張モデルの基礎

(a) 球状熱域。大地を密度 ρ の等方均質半無限弾性体と仮定し, そこに体積 V の球状圧力源を設定する(図 1)。このことは茂木モデルと共通する。本来茂木モデル(Mogi, 1958)は地表の変位に着目したものであったが, 萩原(1977)はこれに重力変化も付加した。茂木の式は $\lambda=\mu$ の場合のみ表記しているが, 萩原は一般的に表現しているので, ここでは萩原の式と対比する。

球域内面に圧力 p が作用すると, V は ΔV だけ広がる。 ΔV により地表は h だけ隆起する。この際の重力変化 Δg は, h によるフリーエア効果 Δg_f と質量分布の変化の効果 Δg_0 からなる:

$$\Delta g = \Delta g_f + \Delta g_0 ; \quad \Delta g_f = -Fh, \quad F = \text{フリーエア係数} = 0.3086 \text{mGal/m} \quad (1)$$

球域外の質量移動によっては, (c)で述べるように Δg_0 は生じない。 Δg_0 は球域内の質量変化によって生じる。 ΔV が球域内温度 T によって発生する熱膨張の場合は, 球域内の質量変化はなく, 結局 $\Delta g_0=0$ で, $\Delta g = \Delta g_f$ である。この際, 球域外の温度は $T=0$ (基準状態) に保たれているとする。

萩原は球域内には本来密度 ρ_0 の物質があり, それが(遠隔域から) 追加供給され, ρ_0 不変の状態で ΔV が生じるとした。この際の球域内の質量変化は $\rho_0 \Delta V$ である。結局:

$$\Delta g_0 = G \rho_0 \Delta V D / R^3 ; \quad G = \text{引力定数} = 6.674 \times 10^{-11} \text{m}^3 / \text{Kg s}^2 \quad (2)$$

ガスであれば実質上 $\rho_0=0$ で, $\Delta g_0=0$ 。これは球域内の質量変化がないことで, 热膨張と共に通す

*Thermal expansion model for gravity change at Akita-komagatake volcano by Choro Kitsunezaki

る。 h については当面萩原(1977)の式を借用するが、表現様式は若干変更する：

$$h = (1-v)\Delta VD/\pi R^3; \quad v=\text{ボアソン比} \quad (3)$$

(b) 任意形状熱域への拡張。図3のごとき円柱状熱域も格子に分割すると、弾性応答において、個々の格子要素(立方体)は体積 V_i が ΔV_i だけ膨張する球状熱源とみなせる*。熱域全体による地表点での h や Δg は、各要素による h_i や Δg_i の和である。それは全質量域による重力がそれを構成する質量要素による重力の和であるとの類似する。単一の球状熱域(要素)における $\Delta g/h$ 比は一般形状の熱域についてもそのまま成立する。したがって、一般に $\Delta g/h = \Delta g_i/h = -F$ 。

圧力源を空洞とする本来の茂木モデルでは、均質媒質内の單一圧力源の弾性応答を単純に加算して、複数源並置の応答を求ることはできない。他方の空洞の存在が前提となるため、解は複雑化する。図1の問題を解くに当たっても、 $z=0$ の面(0面)について対称に圧力源球を設定し、無限均質媒質中の2源問題に置き換え(図2)，境界条件を処理している。その際も球半径 a は両球の間隔 $2D$ よりも十分小さく、干渉を無視できるとする。しかし、熱膨張の場合は球内も球外と同一物質であり、 $T=0$ とすれば単純な均質場となるため、この種の制約はない。

*【注】このことは要素から若干離れた所で成立する。要素幅 b 、要素中心からの距離 R において、 R/b はある程度以上大きくなればならないが、 $b \rightarrow 0$ とし得るため、 $R \rightarrow 0$ となり、有効な R 域自体は制約されない。

(c) h や Δg_0 の算出手順。図2で上半域を除去しても、0面上の垂直応力 σ_z を保持すれば、下半域の状態は変わらない(状態1)。そこで更に補償応力 σ'_z ($=-\sigma_z$)を加え、総合的に0面を $\sigma_z + \sigma'_z = 0$ の自由面状態とする。この σ'_z によって0面は h だけ隆起し、0'面位置に達する(状態3)。0面下の物質も引張され、密度が若干変化($\Delta\rho'$)する。状態2は、状態1の物質状態で観測点だけを0'面まで仮想的に高めた状態である。状態1, 2, 3における重力変化を $\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3$ とする(図4)。重力変化はすべて $\Delta V=0(T=0)$ の状態を基準とする(フリーエア効果は除外)。状態1では球域外の密度変化はない[\because 平均主応力 $\sigma_0=0$; (A4)式]。球域が ΔV だけ拡大し、そこにあった元の物質(質量= $\rho\Delta V$)が球域外に排出されることで Δg_1 が生じる： $\Delta g_1 = -G\rho\Delta VD/R^3$ (4a)

$$\Delta g_0 = \Delta g_3 = \Delta g_1 + (\Delta g_2 - \Delta g_1) + (\Delta g_3 - \Delta g_2) = \Delta g_1 + \Delta g_{32}; \quad \text{ただし } \Delta g_2 - \Delta g_1 = 0, \quad \Delta g_{32} = \Delta g_3 - \Delta g_2 \quad (4b)$$

詳細は省略するが厳密に計算すると、

$$\Delta g_{32} = -\Delta g_1, \quad \text{従って } \Delta g_0 = 0 \quad (5)$$

となる。萩原の算出経路はここでの方式と少々異なるが、結果はすべて上記の方法によるものと一致する。(3)式の h についても同様である。その h と(4a)式の Δg_1 との比 H は、

$$H = h/\Delta g_1 = -(1-v)/\pi G\rho \quad (6)$$

(4a)式の前提でもあったが、熱膨張の場合は球域が膨張しても球域内質量は変化しない：

$$\rho V = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V), \quad \text{従って, } -\Delta\rho/\rho \approx \Delta V/V (\ll 1). \quad (7a)$$

初出以後は \approx は $=$ とみなす。密度変化や体積歪の源は熱膨張である。線膨張係数を α とすると、

$$\Delta\rho/\rho = -\Delta V/V = -\alpha T(1+v)/(1-v) = -\beta T(1+v)/3(1-v); \quad \text{体膨張係数} = \beta = 3\alpha \quad (7b)$$

(7b)式の導き方は付録 A1 に示す。(7b)式を(4a)式と連結する：

$$\Delta g_1 = -G\rho\Delta VD/R^3 = G\Delta\rho VD/R^3 = -G\rho V\beta T\{(1+v)/3(1-v)\}D/R^3 \quad (8)$$

これらは直接的には、球状の熱域についての関係であるが、(b)で述べたように熱域内格子要素にもそのまま適用できる。したがって、任意形状の熱域全体(体積は V)についても、 $V\Delta\rho (= -\rho\Delta V)$ による Δg_1 を求めるとき、それに(6)式の H を乗じることで直ちに h に変換できる。

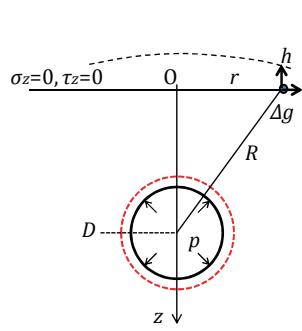


図1. 半無限弾性体内の球域の膨張。

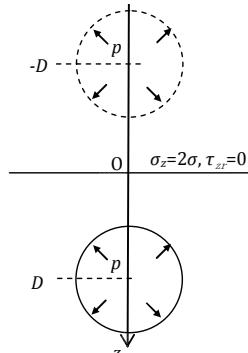


図2. 無限弾性体内の2压力源球の対称配置。

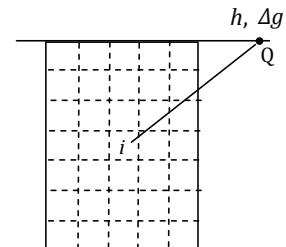


図3. 熱域の格子分割。

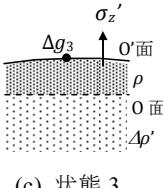
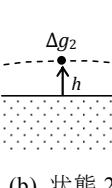
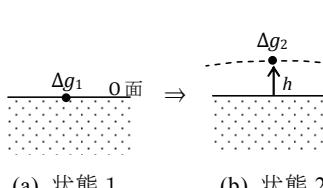


図4. 重力変化算出の各段階。
 $\Delta g_{23} (= \Delta g_3 - \Delta g_2)$ はO面-O'面間の ρ とO面下の $\Delta\rho'$ で発生。

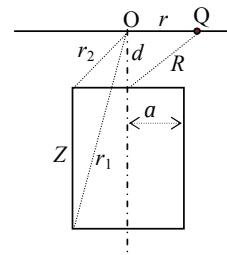


図5. 円柱体。

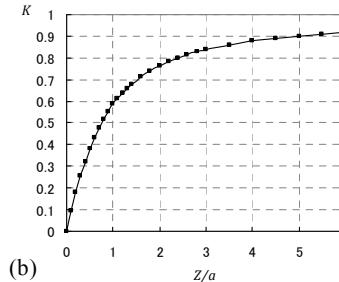
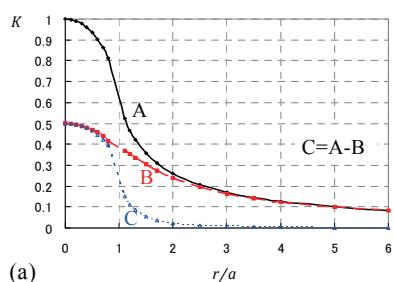


図6. 円柱体でのK。(a) A: $d=0, Z=\infty$ 。B: $d/a=0.75, Z=\infty$ 。(b) $r=0, d=0$ 。

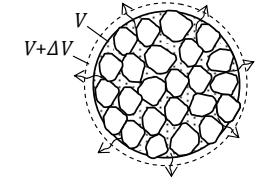


図7. 多孔質媒質内熱域の概念。骨格膨張($V \rightarrow V + \Delta V$)と間隙水の膨張排出。

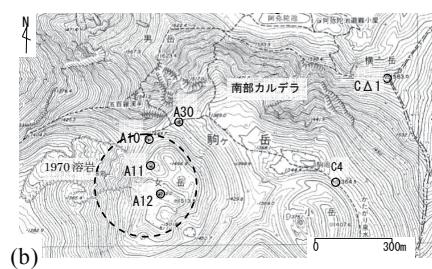
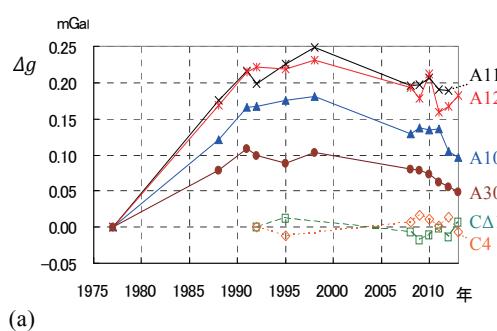


図8. 秋田駒ヶ岳の重力変化(a)と測点分布(b)。(b):破線円=半径200m(中心は1970年火口)。

3. 円柱状高温域

(a) 算出式。後の応用も考慮し、鉛直な円柱状熱域について検討する(図5)。熱域の温度を T (一定)、域外の温度を 0(基準温度)とするのは、これまでと同様である。 T による密度変化 $\Delta\rho$ は常に(7b)式で表され、 T 域内のこの $\Delta\rho$ が Δg_1 を生む。その場合地表の中心点 O での重力異常(Δg_1)は、図5での記号を用い、次のように簡単に表せる (Telford *etal.*,1976,p.62) :

$$\Delta g_1 = 2\pi G \Delta\rho (Z + r_2 - r_1), \quad h = 2(1+\nu) \alpha T (Z + r_2 - r_1) \quad (9)$$

上記第2式は、(6),(7b)式の関係を用いて Δg_1 から変換された h である(以下同様)。

円柱上面を地表面とする場合($d=0$)は、 $r_2=a$, $r_1=(a^2+Z^2)^{1/2}$ で、

$$\Delta g_1 = 2\pi G \Delta\rho \{a + Z - (a^2 + Z^2)^{1/2}\}, \quad h = 2(1+\nu) \alpha \alpha T [1 + Z/a - \{1 + Z^2/a^2\}^{1/2}] \quad (10)$$

ここで円柱が下方に無限長($Z=\infty$)なら、 $\Delta g_1 = 2\pi G \Delta\rho a$, $h = 2(1+\nu) \alpha \alpha T$ (11)

$Z=\infty$ の場合の図5のQ点における Δg_1 はルジャンドル多項式 $P_n(\xi)$ による級数展開として表される (Telford *etal.*,1976,p.64-65)。 $d < a$ では、

$$\Delta g_1 = 2\pi G \Delta\rho a K, \quad h = 2(1+\nu) \alpha \alpha T K ; \quad (12a)$$

$$K = 1 - (R/a)P_1(\xi) + (1/2)(R/a)^2 P_2(\xi) - (1/8)(R/a)^4 P_4(\xi) + (1/16)(R/a)^6 P_6(\xi) \\ - (5/128)(R/a)^8 P_8(\xi) + (7/256)(R/a)^{10} P_{10}(\xi) \dots : r < a \quad (12b)$$

$$K = (1/2)(a/R) - (1/8)(a/R)^3 P_2(\xi) + (1/16)(a/R)^5 P_4(\xi) - (5/128)(a/R)^7 P_6(\xi) + \dots : r > a \quad (12c)$$

ここで、 $\xi = d/R$ とする。 $d=0$ (d は円柱上面の深さ)では、 $\xi=0$ 。

(b) h の様相。次の(A) (B) 2例について、 r/a の関数としての K 値を(12b)(12c)式によります算出した。そして、両 K 値の差を(C)とした。

$$(A): d/a=0, \quad (B): d/a=0.75, \quad (C): (A)-(B).$$

(C)は上面が地表面で、下面の深さ Z が $0.75a$ の円柱を意味する。これらを図6(a)に示す。

上面を地表面とする円柱について、地表中点 O における $K [=h/2(1+\nu)\alpha\alpha T]$ を下面の深さ Z/a の関数として(10)式で求めた。これを図6(b)に示す。上面深度 Z_1 , 下面深度 Z_2 の場合の K は、この図で Z を Z_1, Z_2 としたときの両 K 値の差となる。

地表上の h 分布(結局は K 分布)の概要は図6(a)で読み取れる。円柱域から離れると、 K は低下するが、その度合いは下底が浅くなるほど急激である。これは(A)対(C)の比較から自明である。 $r/a=0$ の K 値には円柱下底の深さが反映する。これを系統的に示したのが図6(b)である。

4. 流通性水飽和多孔質媒質の熱膨張

通常の地層は多孔質で、間隙は水で満たされている。その際の弾性について Biot 理論(狐崎,2005)の枠組みで考察する。多孔質層は固体物質(粒子)で構成される骨格とその間隙を満たす流体からなるが、ここでは流体は水で、間隙は水で飽和されているとする。間隙水の流通が閉ざされていれば、骨格と間隙水を含めて、弾性体として扱える。

実際には間隙水は流通状態にあることが多いと思われる。以下では間隙は流通的であると仮定する。その場合骨格が歪んでも、流体圧は変化せず、骨格は間隙水とは独立に弾性体として挙動する。その際間隙率 φ の変化 $\Delta\varphi$ が無視でき、間隙水の密度も一定に保たれるなら、地層の単位体積あたりの間隙水の質量は不变で、その存在は重力変化に影響しない。単純に骨格=固体弾性体として 3 までの理論を用いればよく、結局 $\Delta g_0=0$ となる。その際の弾性係数、密度、

膨張係数等は骨格としての量である。骨格は基本的には乾燥状態の地層に相当する。特に必要な場合は β 等について、骨格は b 、固体粒子は s の添え字を付す。当面は $\beta_b=\beta_s$ と仮定する。

2(a)の球状熱域の場を上記の多孔質層に置き換えて考察する。温度 T の熱域では骨格は単に固体として膨張する。その体積膨張率 $\Delta V/V$ は(7b)式で表わされる。これを(3)式に代入する：

$$h=(1-v)\Delta V D/\pi R^3 = (1+v) V \beta T D / 3\pi R^3 \quad (13)$$

間隙水は拘束されておらず、水の体膨張率 β_f そのままで膨張し、かつ膨張分は熱域外に流出・散逸する(図 7)。間隙水の密度を ρ_f 、その変化分を $\Delta\rho_f$ とする。温度 T では、 $\Delta\rho_f/\rho_f=-\beta_f T$ である。

これも用いると、 $(V+\Delta V)$ 内での間隙水の質量変化分 ΔM_f は次のように表せる：

$$\Delta M_f = (V+\Delta V)(\varphi+\Delta\varphi)(\rho_f+\Delta\rho_f) - (V+\Delta V)\varphi\rho_f = V\varphi\rho_f(\Delta\varphi/\varphi + \Delta\rho_f/\rho_f) = V\varphi\rho_f(\Delta\varphi/\varphi - \beta_f T) \quad (14)$$

ここでは、 $\Delta V/V \ll 1$, $|\Delta\varphi/\varphi| \ll 1$, $|\Delta\rho_f/\rho_f| \ll 1$ として近似した。 $\beta_b=\beta_s$ の仮定の下では熱膨張のみでは $\Delta\varphi$ は生じない。 T に伴う圧力 p ((A5)式) が負の $\Delta\varphi$ をもたらす。当面はそれを無視し $\Delta\varphi=0$ とみなす。 $\Delta\varphi < 0$ の効果も加味すれば、 β_f は見かけ上若干増加する。この ΔM_f が Δg_0 を生む：

$$\Delta g_0 = G\Delta M_f D/R^3 = -G V \varphi \rho_f \beta_f T D / R^3 \quad (15)$$

これと $\Delta g_f (= -Fh)$ との比は、(13)式も用いて次のように表せる：

$$\Delta g_0/\Delta g_f = (3\pi G \rho_f / F) \varphi \beta_f / (1+v) \beta; \quad 3\pi G \rho_f / F = 0.2038 \quad (\rho_f = 1.000 \text{g/cm}^3) \quad (16)$$

概略値として、 $\beta=3\times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, $\beta_f=5\times 10^{-4}/^\circ\text{C}$, $v=0.3$, $\varphi=0.15$ と仮定すると、

$$\varphi\beta_f/(1+v) \beta = 1.923, \quad \Delta g_0/\Delta g_f = 0.392, \quad \Delta g/\Delta g_f = (\Delta g_0 + \Delta g_f) / \Delta g_f = 1.392 \quad (17)$$

結局、隆起によるフリーエア的重力変化に加えて、40% 増程度の間隙水膨張効果が期待される。

5. 秋田駒ヶ岳の重力変化

(a) 秋田駒ヶ岳・女岳の重力変化と測点分布を図 8(a),(b)に示す。重力は持続的に設置されたコンクリート台上で測定された。相対重力の基準点は A1 (標高約 1307m) で、カルデラ内女岳 (標高 1513m) の北北東 2.0km の山腹にある。観測初年(1977 年) 値からの差を重力変化値としている。使用重力計は LaCoste-Romberg 社製で、1998 年までは G308, 2008 年以後は G579 である。重力計変化によるスケール誤差等の擾乱を低減するため、1992 以後については、ある補正処理をしているが*, 当面の主対象である 1998 年までの重力変化には、実質上影響しない。

*【註】カルデラ北東の 2 点(上縁 CΔ1 と下底 C4)の平均重力値を、女岳域の重力値から差し引いた。

(b) 1 で説明したように、1998 年までの重力増加は、熱活動の低下によるものであった(狐崎, 2012)。現在進行中の重力の漸減は再高温化によるものであるが、重力観測域も高温域からやや離れており、重力変化は少ない。このため、1977-1998 年間を考察対称とする。1998 年を基準とすれば、1977 年では重力は 1970 火口近傍の A12 で 0.23mGal 減少している。重力変化はこの付近でもっとも大きく、離れるにつれて系統的に小さくなる。この際の熱域は火道やその近傍の貫入・残存マグマが周辺に熱を放散した結果と見られるので、半無限円柱モデルを採用する。女岳(玄武岩(主)+安山岩)の実情にほぼ即した定数を仮定し、3, 4 に基づいて試算する：

[仮定値] (11)式 : $a=200\text{m}$, $T=100^\circ\text{C}$, $\alpha=1.0\times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, $v=0.3$ 。間隙流体効果 : (17)式。

[算出値] $h=0.52\text{m}$, $\Delta g_f=-0.16\text{mGal}$, $\Delta g/\Delta g_f=1.392$, $\Delta g=\Delta g_0 + \Delta g_f = -0.22\text{mGal}$

最大値のみの対比であるが、算出値は観測値と調和する。 a, T は複雑な地下温度分布を等価的に概括した値で、 aT =一定の枠内で調整の余地がある。1977 年の比抵抗法探査による推定では、女岳山頂域の地下水位 d' は約 17m 深であった。 $d' \ll a$ であるため、解析上 $d'=0$ とみなした。

6. むすび

弾性体内的熱膨張では、地表隆起の効果 Δg_f だけが重力変化 Δg に寄与する。その種の基本特性は熱域の形態によらず成立する。流通性多孔質媒質では間隙水の膨張効果 Δg_0 が更に增幅的に加わる。女岳の重力変化は、固体としての挙動の他に、間隙水の熱膨張効果も取り入れることでほぼ説明できる。この場合間隙水の浮力も地表隆起に少々寄与しうるが、ここでは無視した。現段階ではモデルの原理的妥当性の確認を重視した。その形態・温度等の仕様は調整・洗練の余地がある。当面は欠けるが、モデルの検証のために h データの併用が勿論望ましい。

参考文献

- 萩原幸男(1977):伊豆半島の異常隆起を説明する茂木モデルとそれに伴う重力変化,震研彙報,52巻,301-309.
 狐崎長琅(2005):Biot の弾性係数と有効応力の概念,物理探査,58巻,631-642.
 狐崎長琅・村岡淳(2010):秋田駒ヶ岳の地球物理学的観測と近年の火山状況,秋田大学工学資源学部付属地域防災力研究センター報告,4号,19-28.
 狐崎長琅(2012):秋田駒ヶ岳火山の観測と火山状況,東北技術だより,仙台管区気象台,26巻,1号,21-30.
 Mogi, K.(1958): Relations between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surfaces around them, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol.36.99-134.
 Roark, R. J., and Young, W. C.(1975): Formulas for stress and strain, McGraw-Hill Kogakusha,Ltd,506.
 Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E., and Keys, D.A.(1976): Applied Geophysics, Cambridge Univ. Press.

付録

A1. 球状熱域の弾性挙動

(a) 球体の熱膨張。 均質な球体を想定する。外面は自由な状態に置かれている。温度が基準値から T だけ上昇することによって、半径は a から $a+\Delta a$ に、体積は V から $V+\Delta V$ 変化する：

$$\Delta a/a = \alpha T, \quad \Delta V/V = \beta T ; \quad \text{体膨張係数} = \beta = 3\alpha ; \quad \alpha = \text{線膨張係数} \quad (\text{A1})$$

この球体の外面に一様な圧力 p を加えると、その半径は更に変化し、体積も変化する（図1）。

$$\text{総合的には} \quad \Delta V/V = 3\Delta a/a = \beta T - p/k ; \quad k = \text{体積弹性率}, \quad (\text{A2})$$

$T=0$ なら、単に $\Delta V/V = -p/k$ で、通常の弾性体の一様圧縮となる。歪について、応力の効果と熱膨張の効果は単純に加算される（線形的に結合）。この球体内では圧力は一様で、 p である。

(b) 無限媒質内に球状圧力源がある場合の歪。 球殻内面の半径を a 、外面半径を b とする。外面压=0 として、内面に一様な圧力 p を作用させると、内半径は a から $a+\Delta a$ に変化する。既存公式(Roark and Young,1975)の Δa 式において $a^3/b^3 \rightarrow 0$ とする：

$$\Delta a/a = p(1+\nu)/2E = p/4\mu = p(1+\nu)/6(1-2\nu)k ; \quad \text{剛性率} = \mu = E/2(1+\nu), \quad \text{ヤング率} = E \quad (\text{A3})$$

ここで、 $k = E/3(1-2\nu)$, $\mu/k = 3(1-2\nu)/2(1+\nu)$ 。

半径 R での主応力：半径方向 $\sigma_R = -pa^3/R^3$, 周方向 $\sigma_t = -\sigma_R/2$, 平均主応力 $\sigma_0 = (\sigma_R + 2\sigma_t)/3 = 0$ (A4)

(c) 無限媒質中に球状高温域が存在する場合。 これは、(a)における温度 T の球体が、(b)の球状空洞に密着してはめこまれている場合に相当する。半径 a の球面の外側から内側に向けて作用する応力は、内側から外側に向けて作用する応力とは作用と反作用の関係にあり、相互に等しい。つまり、(A2)式と(A3)式において、両者の a も、 p も等しい。(A2)(A3)式より、

$$\beta T - p/k = p(1+\nu)/2(1-2\nu)k, \quad \therefore p = k\beta T \{2(1-2\nu)/3(1-\nu)\} \quad (\text{A5})$$

この p を(A3)式に代入し、 $\Delta V/V$ や $\Delta a/a$ を温度 T の関数として表わす：

$$\Delta V/V = 3\Delta a/a = p(1+\nu)/2(1-2\nu)k = \beta T (1+\nu) / 3(1-\nu) = \alpha T (1+\nu) / (1-\nu) \quad (\text{A6})$$