

植生のある高レイノルズ数流れにおける $k-\varepsilon$ モデルの提案*

平田吉成 福島県山口土木事務所

呉 修一 富山県立大学工学部

有働恵子 東北大学災害科学国際研究所

真野 明

1. はじめに

開水路の流れは治水、利水、親水等の目的から数多くの研究がされてきた。その多くは緩急配流れに関する研究であり、急急配流れを対象とした研究は多くない。しかし、近年において気候変動による豪雨の頻発により堤防を越える程の洪水の発生が増加し、その場合堤防裏法面のような急急配に大量の水が流れる事から急急配流れのような高レイノルズ数流れに対する研究への需要は高まると考えられる。また、実河川の河床には植生群落がしばしば見られ、堤防の裏法面は自然環境への配慮や緑化推進の取り組みから、芝生などが張られていることが多い。これらの植生は洪水時の疎通能力阻害といった負の面もあるが、河床や堤防の洗掘防止、植生による自浄作用の促進、水辺に生息する生物の棲息場の保全、親しみやすい親水環境などの正の面も多々あるため、植生の絡む水理現象の研究が望まれている。

植生のある開水路流れを予測する研究¹⁾²⁾³⁾では、多くの数値モデルが提案されている。これらのモデルの多くが実験室スケールのデータを用いて開発されている。しかし実験室スケールのデータの多くは、実スケールのデータに比べレイノルズ数が小さいという欠点がある。多くのモデルは経験的にそのモデル係数の値が決められたため、レイノルズ数によって値が違ふことが考えられる。また植生の影響は抗力により表されるが、抗力を決めるパラメータのひとつである抗力係数はレイノルズ数の関数であり、高レイノルズ域にある臨界レイノルズ数以降において値が急落することがわかっている。そのため、実験室スケールに基づいて提案されたモデルが実スケールにおいて適用が難しい状況が考えられる。

本研究では、実スケールで使用可能な乱流モデルを提案することを目的とする。すなわち、高レイノルズ数流れにおける植生のある緩急急配流れの流速、乱れを $k-\varepsilon$ モデルを用いて予測するモデルを提案する。その際、高レイノルズ数の計算に伴い $k-\varepsilon$ モデルの係数値が既往研究で推奨されている値から変化すると考えられるため、係数を実験ケースに応じて同定を行い、これらの結果からレイノルズ数と係数の値の関係を導き出し、モデルの改良を試みる。

2. 計算モデル

本研究のモデルは清水らのモデルに Katul⁴⁾の手法を適用させた1次元 $k-\varepsilon$ モデルである。また比較する計算モデルとして清水のモデルを使用した。それぞれ清水のモデルは水流に、Katulのモデルは気流に対応したモデルになっている。水流に適用させたモデルを気流に対応させる研究は岡部ら⁵⁾が行っており、モデルの係数と境界条件を変更することによって可能としている。しかしながら、どのような条件によって係数が変化するかについては調べられていない。以下に本研究で用いたモデルを示す。

*Proposal of $k-\varepsilon$ Turbulent Model in High Reynolds Number Flow with Vegetation, Yoshinari Hirata, Shuichi Kure, Keiko Udo, and Akira Mano

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_t + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + C_{fk} \left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2} \right) U - \frac{1}{2} C_{dx} \beta_d \lambda U k \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - C_5 \frac{1}{2} C_{dx} \beta_d \lambda U k \varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} \left[C_1 \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_2 \varepsilon + C_{f\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2} C_{dx} \lambda U \sqrt{U^2} \right) U \right) \right] \quad (3)$$

$$C_5 \beta_d = C_\mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{\frac{2}{3}} \left(C_{fk} C_{f\varepsilon} - \frac{C_2 - C_1}{2} \right) + \frac{6}{\sigma_k} \quad (4), \quad \beta_d = C_\mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{\frac{2}{3}} C_{fk} + \frac{3}{\sigma_k} \quad (5)$$

ここに、 U は流下方向の時間平均流速、 y は底面からの鉛直方向距離、 k は乱れエネルギー、 ε は乱れエネルギーの散逸率、 ν_t は動粘性係数、 ν_T は渦動粘性係数を表し、係数 C_μ, C_1, C_2 はそれぞれ0.09, 1.44, 1.92、 λ は植生密度（流れの単位容積当たりの遮蔽面積）である。佐藤は係数 $C_{dx}, C_{fk}, C_{f\varepsilon}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ をそれぞれ1.3, 0.07, 0.16, 1.0, 1.3 とし、Katul は係数 C_5 を1.5、 β_d を4.0として計算している。

本研究のモデルと清水のモデルの違いは(2)式右辺最終項、(3)式の右辺第2項である。これらの項は植生抗力により伴流が生じる際にできる、急速に拡散する小さな渦が持っているエネルギーを表している。ここで係数 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ はそれぞれ乱流拡散による乱れ運動エネルギー k とエネルギー散逸率 ε の輸送を表す項に含まれており、2つの係数は輸送を補正する意味を持っている。この係数は渦動粘性係数を物質の乱流拡散係数 α_{MT} にて除した値で定義される。物質の乱流拡散係数は流体の種類によって数値が決まる係数であるが、渦動粘性係数は流れによって変化する値であるため、 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ は変数である。

係数 $C_{fk}, C_{f\varepsilon}$ は植生の形状抵抗が乱れエネルギーの生成と散逸に及ぼす効果を示す係数である。この係数はSanz⁹⁾によって $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ との関係式が提案されており、 $C_{fk}, C_{f\varepsilon}$ は $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ と同様に流れによって値が変わる係数であると考えられる。よってモデル係数 $C_{fk}, C_{f\varepsilon}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ は予測する流れに応じて値を変更すべきである。本研究ではモデル係数について係数の同定を行なう。その際、Sanzが提案した係数の関係式を用いて計算負荷の減少を図る。以下にSanzの提案した式を示す。

$$C_{f\varepsilon} = C_{\varepsilon 4} C_{fk} \quad (6), \quad C_{\varepsilon 4} = \sigma_k \left\{ \frac{2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{C_\mu^{\frac{1}{2}}}{6} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} (C_2 - C_1) \right\} \quad (7)$$

底面境界条件については岡部ら⁷⁾のモデルを参考にしている。つまり、水路床に最も近い格子点の流れが水路床上での摩擦速度 u_{*B} に規定される平衡壁面乱流になるものと仮定し、次のように設定した。

$$(v_T + \nu) \frac{dU}{dy} = \alpha u_{*B}^2 \quad \text{at } y = \frac{y_B}{2} \quad (8), \quad k = \beta u_{*B}^2, \quad \varepsilon = \frac{u_{*B}^2}{\kappa y_B} \quad \text{at } y = y_B \quad (9)$$

ここで、 κ はカルマン定数、 α 及び β は係数である。 α 及び β の値は水路床が粗面の場合、 $\alpha = 1, \beta = 4$ とするのが適当だとされている。水面境界条件については瀬津・中川⁸⁾のモデルを参考にし、次のように設定した。

$$U_{iend} - U_{iend-1} = \frac{u_{*0} \Delta y}{k h_n} \quad (10), \quad k_{iend} = \frac{2}{3} k_{iend-1}, \varepsilon_{iend} = \frac{2}{3} \varepsilon_{iend-1} \quad (11)$$

ここで、 i_{end} は水面上に位置する計算格子点の番号、 Δy は格子点間隔である。 U の条件式は、 u_{*0} に規定される対数型流速分布から導かれている。また k および ε の条件は、禰津・中川と同様に、水面付近で乱流構造はほぼ等方性と仮定し、水面上では水深方向の変動流速のみなくなると仮定した。また水深は実験で得られたものを使用した。

以上のモデルを時間に関しては前進差分、空間については中央差分で離散化し計算を行った。また、実験から得た等流水深 h_n を既知量として与え、未知変量 U 、 k 及び ε の変動量がひとつ前の時間ステップに対して 0.1 % 以内に収まる条件で収束解を求めた。なお、計算対象領域は実験開水路長と同等とし、 $y = y_B \sim h_n$ の範囲で、計算格子点をこの間に等間隔 (y_B) で配置した。ここで y_B は、粒径 d を用いて $y_B = 2d$ とした。次に摩擦速度だが、これは林⁹⁾が用いた流体塊に対する力のつりあい式を水没植生に対応できるように拡張した式を用いて算出した。以下に式を示す。

$$NF_x B dx + \tau_b B dx (1 - S_v) + \tau_v B dx S_v = \rho g h_v B dx I_e (1 - S_v) + \rho g (h_n - h_v) B dx I_e \quad (12)$$

ここで S_v は河床単位面積に占める円柱断面面積の比、 F_x は円柱に作用する抗力、 τ_b は河床単位面積に作用する平均せん断応力、 B は水路幅、 dx は水路長、 I_e はエネルギー勾配、 τ_v は円柱単位面積に作用する時間平均せん断応力、 h_n は水深を表す。以上のモデルを時間に関して前進差分、空間については中央差分で離散化、計算を行い未知変量 U 、 k 及び ε の変動量がひとつ前の時間ステップに対して 0.001% 以内に収まる条件で収束解を求めた。

乱れ強度は、計算された乱流エネルギー k を以下に示す $Rodi^{10)}$ の代数応力関係を用いて評価した。

$$\frac{u'^2}{u^2} = k \left\{ \frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma) \left(-\frac{2}{3} \frac{P_K}{\varepsilon} \right)}{c_\gamma + \frac{P_K}{\varepsilon} - 1} \right\}, \quad P_K = \nu_t \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (13)$$

ここに、 γ と c_γ はそれぞれ 0.6, 1.5 である。本研究では係数 C_{fk} , $C_{f\varepsilon}$, σ_k , σ_ε を同定する際、流速と乱れ強度のナッシュ指標の合計が最大となるような係数を採用した。

3. 実験ケース

本研究においては佐藤ら¹¹⁾、Wilson ら¹²⁾、Amiro¹³⁾が行なった実測を再現した。佐藤の実験は、水路長、水路幅、勾配はそれぞれ 4.2 m, 0.2 m, 1/10 としている。直径 3 mm, 高さ 3 cm の模擬植生を 2 cm 間隔で正方ひし形状に水路に設置している。本実験の植生密度 λ は 0.075 cm^{-1} である¹⁴⁾。流量は 5 L/s, 8 L/s, 11 L/s の 3 種類の条件で実験を行なっている。

辻本らの実験は水路長、水路幅、勾配は各々 12 m, 0.4 m, 1/1000 から 7/1000 としている。高さ 4.6 cm, 直径 1.5 mm の模擬植生を水路幅方向・流下方向とも 2 cm 間隔で配置し、実験を行なっている。

Wilson らの測定は 25 ha の corn canopy にて行なわれた。植生の高さは 225 cm, 直径 5 cm, 1 ha あたり 59000 本密生しており、風速の測定を行なっている。

Amiro はカナダの寒帯森林にて風速測定を行った。植生はクロトウヒと呼ばれる種類であり、1ha 当たり 7450 本あり、植生の平均高さは 12 m, 直径は平均 8 cm である。

4. 計算結果

佐藤らの実験の流量8 L/sにおける流速分布, 乱れ強度分布をそれぞれ図-1, 図-2に示す. 縦軸が底面からの距離, 横軸が流速と乱れ強度を表し, 実測値が実験による実測結果, 本研究, 清水モデルがそれぞれのモデルによる計算結果を示す. (係)は, 係数を実測値にあうよう調整した計算結果である. 流速分布は4つのモデルの計算結果に大きな違いはなく, 全てのモデルにおいて流速分布形が概ね一致しているといえる. 同じ実験条件における乱れ強度分布は清水のモデル, Katul のモデルにおいては植生高付近である底面からの距離が3 cm部分において過大評価となっているが, 本研究モデルによる計算では過大評価部分が大きく改善され, 実測値に近い値を再現する事ができている. 流量5 L/s, 11 L/sにおいても同様の結果を得た.

Wilson らの実験における流速分布, 乱れ強度分布をそれぞれ図-3, 図-4に示す. 流速分布は良好に再現できており, 植生による流速の減速や植生高付近から始まる加速も再現されている. 乱れ強度分布もまた, 再現できている. 他の実験条件においても同様の結果を得た. これらの計算結果における本研究のモデルと清水のモデルとの比較から, 係数値の同定がモデル予測精度の向上において有効な手段である事が示される.

各実験での植生内レイノルズ数と, それぞれの実験におけるモデル係数 C_{fk} , C_{fe} , σ_k , σ_ε の値をプロットしたものを図-5から図-8に示す. 縦軸が各係数の値, 横軸が植生内レイノルズ数, 佐藤(計算)辻本(計算), Wilson, Amiro はそれぞれの実験を再現した場合の係数値, 清水, 岡部は清水ら, 岡部らが既往文献において使用した値をプロットしたものである.

図-5, 図-6の C_{fk} , C_{fe} についてのプロットであるが, 低レイノルズ数の場合では値に大きなバラつきがあり, 一定の値を取っていない. しかしレイノルズ数が大きくなるに従って C_{fk} は 0.02 から 0.03 程度に, C_{fe} は 0.05 程度に収束していく傾向が見て取れる. これはレイノルズ数が大きくなった

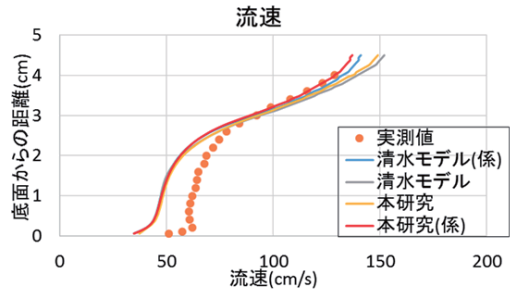


図-1 佐藤らの実験(Q=8L/s)の流速分布

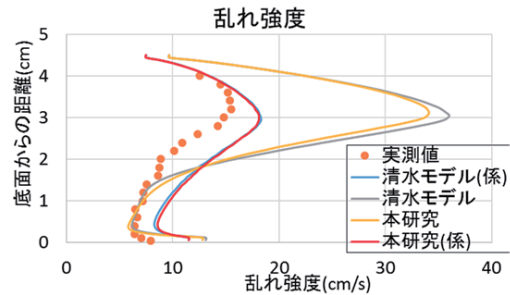


図-2 佐藤らの実験(Q=8L/s)の乱れ強度分布

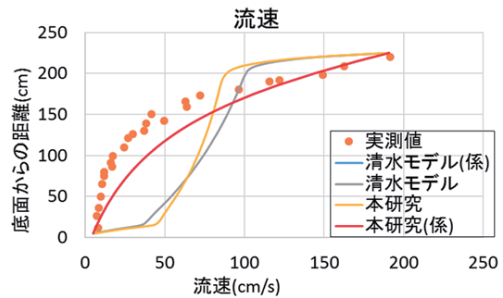


図-3 Wilson らの実験の流速分布

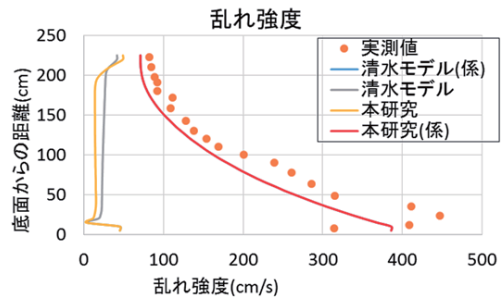


図-4 Wilson らの実験の乱れ強度分布

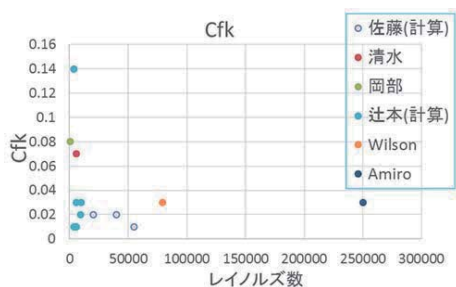


図-5 係数 C_{fk} と Re 数についてのプロット

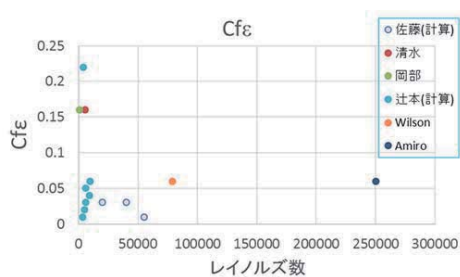


図-6 係数 C_{fe} と Re 数についてのプロット

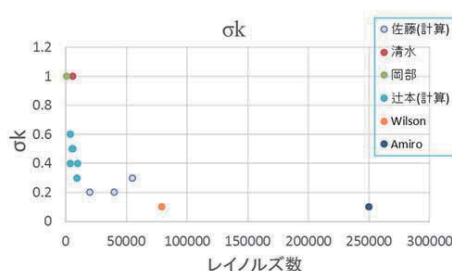


図-7 係数 σ_k と Re 数についてのプロット

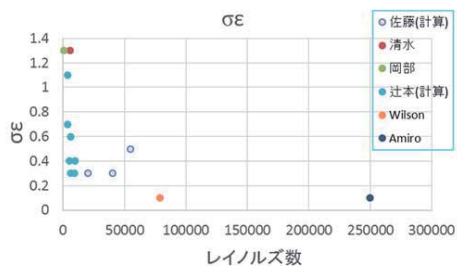


図-8 係数 σ_ϵ と Re 数についてのプロット

ことで流れが安定したために、バラつきがなくなったと考えられる。係数の持つ意味から考察すると高レイノルズ数においては、植生の影響による乱れエネルギーの生成効率と散逸効率が $1/2$ から $1/3$ になることを意味している。これは高レイノルズ数において抗力係数の低下が反映された結果であり、現地流れに対応できる可能性を示したものと考えられる。図-7、図-8の $\sigma_k, \sigma_\epsilon$ についてのプロットでは、低レイノルズ数の場合では値が大きく、レイノルズ数が大きくなるに従って小さくなり、最終的には 0.1 から 0.2 程度に収束していく傾向が見て取れる。係数の持つ意味から考察すると高レイノルズ数においては、渦運動による乱れエネルギーとその散逸率の輸送が活発になることを意味している。

最後に本研究で提案したモデル・係数を用いて実河川の流れの再現を試みた。実地観測データは2005年北海道美唄川出水時に計測された流速分布¹⁵⁾を使用する。計測地点付近は、低水路及び高水路にかけてヤナギ類の河岸林が分布しており、調査断面においては、低水路幅 50 m の内右岸側約 10 m 、左岸側約 15 m にかけてヤナギ林が繁茂していた。また、調査箇所は河床勾配は $1/1250$ (計画 $1/1159$)、観測時の水位は $\text{EL } 12.623\text{ m}$ であり、低水路満杯の状態であった。本研究では文献に記載されている計測点の内、植生が分布している地点で計測を行なっている1つの計測点のデータを使用した。

計算結果と実測値の比較を図-9に示す。計算値は高レイノルズ数で一定になった係数を使用し算出されている。計算値は実

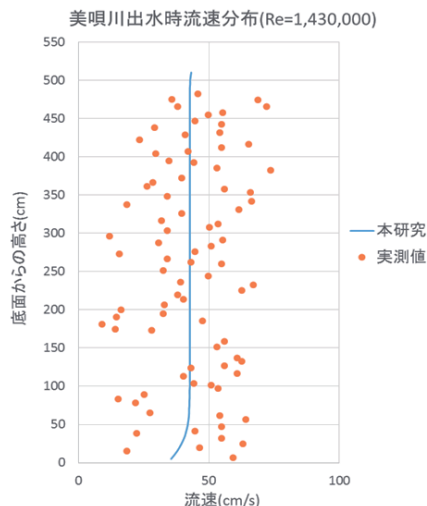


図-9 美唄川での計算結果

測に近い値を取り、植生のある高レイノルズ流れを再現できているといえる。以上により、実河川スケールの高レイノルズ数流れを対象とした数値計算でも、一定のモデル係数を用いて計算が可能である。

5. 結論

清水らの用いた $k-\varepsilon$ モデルを参考にした計算モデルにおいて、植生のある流れ場の実験データの再現を試みた。その際モデル係数の同定を行い、係数の値と実験条件の関係を見出す事を目的とした。流速及び乱れ強度を数値計算より再現することで同定を行なった係数により乱れ強度の予測精度を向上することが出来た。また、モデル係数 C_{fk} , $C_{f\varepsilon}$, σ_k , σ_ε はレイノルズ数が大きくなるに従い各々 0.03, 0.05, 0.2, 0.2 程度に収束していく事を明らかにした。レイノルズ数増加に伴う C_{fk} , $C_{f\varepsilon}$ の低下は、高レイノルズ数における抗力係数の低下を反映したものであり、現地対応に成功したと考えられる。一定となった係数を用いることにより本研究において使用したモデルは現地高レイノルズ数流れの再現に成功することが出来た。よって本研究で使用したモデル・係数は現地の高レイノルズ数流れである実河川流れに適用可能であると考えられる。

謝辞：本研究は、JSPS 科研費(26289158, 代表：真野明)の助成を受けたものである。ここに謝意を表する。

参考文献：

- 1) 清水義彦, 辻本哲郎, 中川博次, 北村忠紀：直立性植生層を伴う流れ場の構造に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.438, II-17, pp.31-40, 1991.
- 2) 清水義彦, 辻本哲郎, 中川博次：直立性植生層を伴う流れ場の数値計算に関する研究, 土木学会論文集, No.447, II-19, pp.35-44, 1992.
- 3) 佐藤元泰, 真野明, 有働恵子：越流による堤防裏法面侵食に及ぼす植生の影響に関する基礎的研究, 東北大学修士論文, 2012.
- 4) Katul G. G.: One-and two equation models for canopy turbulence, *Boundary-Layer Meteorol.*, 113, pp.81-109, 2004.
- 5) 岡部健士, 吉村毅, 湯城豊勝, 竹林洋史：樹木群生を伴う河床上の水流と気流の相似性と数値解法について, 水工学論文集, 2003.
- 6) Sanz C.: A note on $k-\varepsilon$ modelling of vegetation canopy air-flows, *Boundary-Layer Meteorology* 108, 2003.
- 7) 岡部健士, 湯城豊勝, 児島眞：植生を伴う河床上の掃流砂量に関する研究, 水工論文集第 41 巻, 1997.
- 8) 禰津家久, 中川博次：修正 $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集 No.387, 1987.
- 9) 林健二郎：開水路中に設置された直立円柱群の河床せん断応力評価, 水工学論文集, 2010.
- 10) Rodi W.: A new algebraic relation for calculating the Reynolds stress, *ZAMM*, Vol.56, pp.219-221, 1976.
- 11) 辻元哲郎, 北村忠紀：直立型植生を有する開水路流れ, 土木学会中部支部, 1990.
- 12) Wilson et al.: Statistics of atmospheric turbulence within and above a corn canopy, *Boundary-Layer meteorology*, 1982.
- 13) Amiro B. D.: Comparison of turbulence statistics within 3 boreal forest canopies, *Boundary-Layer meteorology*, 1990.
- 14) 平田吉成, 真野明, 有働恵子, 呉修一： $k-\varepsilon$ モデルによる植生のある急勾配流れの乱れ予測, 土木学会論文集 B1, Vol.70, No.4 pp. I_859-I_864, 2014.
- 15) 阿部修也, 渡邊康玄, 桑村貴志：2005 年美唄川出水の樹木群落を含む流速鉛直分布の観測, 水工学論文集, 2010.